Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 11

[Beachte: Abgabe bis Mo, 6.7, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [3P]

(a) Seien A, B zwei $N \times N$-Matrizen. Warum gilt i.A. *nicht* $AB = AC \Rightarrow B = C$?

(b) Wie sieht $\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle$ in Matrixschreibweise aus, wenn für die Darstellung eine Basis verwendet wird, die *nicht orthonormal* ist?

(c) Warum können wir $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ als Matrix darstellen, was ist die wichtige Grundvoraussetzung, die man an D stellen muss?

Aufgabe 2 Spur einer Matrix* .... [6P]

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung ist, also

$$\mathrm{Sp}(xA + yB) = x\,\mathrm{Sp}(A) + y\,\mathrm{Sp}(B)\ . \tag{1}$$

[1P]

(b) Der $\mathbb{R}^{m\times m}$ bildet zusammen mit der komponentenweisen Addition $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ und der komponentenweisen Multiplikation $xA = (x\,a_{ij})$ einen Vektorraum. Zeigen Sie nun, dass die Operation $\langle A|B\rangle := \mathrm{Sp}(A^T B)$ auf $\mathbb{R}^{m\times m}$ ein Skalarprodukt definiert. [3P]

(c) Seien $E^{(kl)}$ mit $E^{(kl)}_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ definierte Matrizen. Zeigen Sie mit Hilfe des oben definierten Skalarprodukts, dass die Matrizen $E^{(kl)}$ eine Orthonormalbasis bilden. [2P]

Aufgabe 3 Matrixmultiplikation .... [4P]

Berechnen Sie aus den gegebenen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

die folgenden Produkte (falls existent!): BA, BC, $C^\dagger A$, CA, BC^T und $C^\mathrm{T} C$.

Aufgabe 4 Drehung im $\mathbb{R}^3$ .... [10P]

Jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Matrix D darstellen, sodass ein Vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)^\mathrm{T}$ auf einen Vektor $\mathbf{r}' = (x', y', z')^\mathrm{T}$ durch

$$\mathbf{r}' = D\,\mathbf{r},$$

abgebildet wird.

(a) Berechnen Sie die Matrix D für die folgenden Fälle:

  (i) eine Rotation um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$ um die z-Achse, (4P)

  (ii) eine Rotation um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ um die y-Achse. (4P)

(b) Berechnen Sie außerdem D^{T} und $D^{\mathrm{T}}D$ für D aus (a). Um welche Matrix handelt es sich bei D^{T}? (2P)

Hinweis: Machen Sie sich eine Skizze und ermitteln Sie die Wirkung der jeweiligen Rotation komponentenweise für $\mathbf{r}'$. *Die Matrix* D *erhalten Sie indem Sie die Matrixmultiplikation „rückwärts“ ausführen und* $\mathbf{r}$ *aus* $\mathbf{r}'$ *„rausziehen“.*

Aufgabe 5 Matrixexponential* .... [7P]

Das Matrixexponential einer $N \times N-$Matrix M kann als

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \quad \text{mit} \quad M^0 := \mathbb{1} \ . \tag{2}$$

geschrieben werden. $\mathbb{1}$ bezeichnet hierbei die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass die Relationen

(a) $e^{M^T} = \left(e^M\right)^T$ und $e^{M^*} = \left(e^M\right)^*$ (2P)

(b) $MA = AM \Rightarrow e^A e^M = e^{A+M}$ [1] (4P)

erfüllt sind. A ist hierbei auch eine Matrix der Größe $N \times N$.

(c) Warum müssen die Matrizen für das Matrixexponential quadratisch sein? (1P)

Aufgabe 6 Kettenregel für Jacobi-Determinante .... [6P]

Betrachten Sie als Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^2$ die Drehung um einen Winkel φ und eine Streckung/Stauchung, gegeben durch die Abbildungen

$$R_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad S_{a,b} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

Gegeben sei nun eine Transformation M, zusammengesetzt aus Drehung, Streckung/Stauchung und Rückdrehung, also

$$M = R_{-\varphi} \circ S_{a,b} \circ R_\varphi \quad (\circ : \text{Verknüpfung der Abbildungen}^2).$$

Wodurch sind die Jacobi-Determinanten der Einzeltransformationen gegeben? Bestimmen Sie unter Verwendung der Relation aus Aufgabe 2 Blatt 9 die Jacobi-Determinante von M.

---

[1] Verwende hierbei für das Produkt von Summen den Binomialkoeffizient: $(A+M)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k M^{n-k}$ für $AM = MA$.

[2] Bei der Abbildung M wird zunächst die Drehung um φ, dann die Streckung/Stauchung und zuletzt die Drehung um $-\varphi$ ausgeführt.