Universität Regensburg SS 2020
Dr. P. Wenk
A. Bereczuk, C.-A. Moreno-Jaimes, G. Maier, J. Schramm

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 10

[Beachte: Abgabe bis Mo, 29.06.2020, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Fragen zur Vorlesung .... [4P]

(a) Bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung haben wir mit einer Integration über ein Volumen V begonnen. Am Ende fällt diese Integration weg, warum?

(b) Wie sieht die integrale Form der Maxwell-Gl. $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ aus?

(c) Ist das Skalarprodukt über $\mathbb{C}$ linear im ersten Argument? Und im zweiten?

(d) Welche Eigenschaft des Skalarprodukts liefert $G_{ij} = {G_{ji}}^*$?

Aufgabe 2 Satz von Stokes* .... [16P]

Berechnen sie mit dem Satz von Stokes die Größe $\int_{\mathbf{A}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$, mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für

(a) $\mathbf{F} = (-y-2)\mathbf{e}_1 + (x+1)\mathbf{e}_2$; $\mathbf{A} = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1;\ z = 0\right\}$.

(b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\mathbf{A} = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x, y \leq 2;\ 1 \leq z \leq 5\right\}$.

(c) $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{e}_1 - xz\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$; $\mathbf{A} = \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1;\ 0 \leq z \leq 1\right\}$.

(d) Zeigen Sie die Gültigkeit des Satzes für Teilaufgabe (a).

Aufgabe 3 Satz von Gauß .... [16P]

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Größe $\int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, \mathrm{d}V$ für

(a) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und V die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und V der Zylinder $x^2 + y^2 = 2;\ -5 \leq z \leq 10$

(c) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ xyz \end{pmatrix}$ und V der Quader $0 \leq x \leq 5;\ 0 \leq y \leq 10;\ 0 \leq z \leq 1/2$

(d) Zeigen Sie die Gültigkeit des Satzes für Teilaufgabe (a).

Aufgabe 4 Skalarprodukt .... **[6P]**

Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, die in der Basis

(a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

dargestellt sind.