

Übungen zur Vorlesung *Mathematische Methoden*
Blatt 1

[Beachte: Abgabe bis Mo, 27.4, unter G.R.I.P.S. Mit (*) markierte Aufg. werden in der Zentralübung besprochen.]

Aufgabe 1 Rechnen mit komplexen Zahlen [8P]

Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$(a) \left| \frac{\sqrt{5} + 3i}{1 - i} \right|, \quad (b) (1 + i)^{40}, \quad (c) \sin(i), \quad (d) i^i.$$

Aufgabe 2 Inversionsabbildung [8P]

Die Inversion ist gegeben durch

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = \frac{1}{z}, \quad \text{mit } z, w \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass eine Gerade in der z -Ebene (beschrieben mit den Koordinaten (x, y)), die nicht durch den Ursprung geht, auf einen Kreis in der w -Ebene (beschrieben mit den Koordinaten (u, v)) abgebildet wird.

Hinweis: Siehe Vorlesung "Vorbereitung zur Vorlesung Mathematische Methoden".

Aufgabe 3 Ableitungen [10P]

Berechnen Sie die Ableitung nach x , mit $x \in \mathbb{R}$, von

(a) $x^n, (ax + x^3)^2$, mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}$,

(b) $\ln(e^x), e^{ax^2}$, mit $a \in \mathbb{R}$,

(c) x^x ,

(d) $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$,

 [Benutzen Sie die Darstellung von \sin und \cos mittels Exponentialfunktionen und die Ableitung dieser.]

(e) $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x)$.

Aufgabe 4 Partialbruchzerlegung [8P]

Vereinfachen Sie mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\frac{2x^2 - 3x}{2 - 3x + x^2}$,

(b) $\frac{24 + 25x - 15x^2 + 33x^3 - 45x^4 + 12x^5}{-9x + 3x^2}$.

 Führen Sie zunächst eine Polynomdivision durch!

Aufgabe 5 Relationen zwischen Winkelfunktionen [6P]

Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die folgenden Relationen:

(a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$,

(b) $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$,

(c) $\cot(2x) = \frac{1}{2 \tan(x)} - \frac{\tan(x)}{2}$.

☞ Nutzen Sie (a) und (b).

Aufgabe 6 * Brennpunkt der Parabel [10P]

Betrachten Sie eine Schar von Strahlen, die parallel zur Ordinatenachse auf eine Parabel $f(x) = ax^2$ mit $a > 0$ einfallen. Sie werden an der Tangente des Auftreffpunktes an der Parabel gespiegelt (Einfallswinkel=Ausfallswinkel). Zeigen Sie, dass diese Strahlen sich (nach einer Spiegelung) alle in einem Punkt, dem Brennpunkt der Parabel, schneiden. Fertigen Sie dabei eine Skizze an.

☞ Für die Umformung der Steigung des reflektierten Strahls kann die Relation aus Aufg. 5(c) nützlich sein.

