

Übungsklausur zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
(Blatt 10)

Aufgabe 1 * Komplexe Zahlen [12P]

- a) Berechnen Sie für $z = \cos(i) e^{2i}$, die Werte $|z|$, $\text{Im}(z)$, $\text{Re}(z)$ und z^* . (4P)
- b) Wie lautet $z = (1 + i)^6$ in Polardarstellung? (4P)
- c) Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerformel: $\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (4P)

Hinweis: Machen Sie sich für den Winkel in b) eine Skizze!

Aufgabe 2 Taylorreihe [10P]

Berechnen Sie die Taylorreihen von $f(x)$ und $g(x)$ um die angegebenen Entwicklungspunkte x_0 bis einschließlich

- a) 3. Ordnung $f(x) = e^{x^2+x}$ um $x_0 = 1$, (5P)
- b) 2. Ordnung $g(x) = \frac{1}{\sinh^2(x)+1}$ um $x_0 = 0$. (5P)

Aufgabe 3 Integration und Diracsche- δ -Distribution [10P]

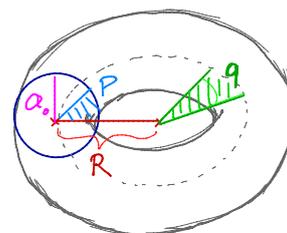
Integrieren Sie die folgenden bestimmten/unbestimmten Integrale ($x \in \mathbb{R}$).

- a) $\int_3^5 f(x) \delta(e^{x^2} - 1) dx$, mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Testfunktion, (1P)
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} x \delta(5x - 1) dx$, (2P)
- c) $\int_0^1 a^x dx$, mit $a > 0$, (3P)
- d) $\int \frac{1}{\tan(y)} dy$, $y > 0$. (4P)

Aufgabe 4 Torus [10P]

Ein Volltorus kann für festes $R > 0$ in kartesischer Basis durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R + a \cos(p)] \cos(q) \\ [R + a \cos(p)] \sin(q) \\ a \sin(p) \end{pmatrix}$$



parametrisiert werden, wobei $p, q \in [0, 2\pi)$, $a \in (0, a_0)$ und $a_0 < R$ gelten.

Berechnen Sie:

- a) die Jacobi-Determinante $|\partial(x, y, z)/\partial(a, p, q)|$, (5P)
- b) und das Volumen dieses Volltorus. (5P)

Aufgabe 5 * Determinante und Spur**[3P]**Berechnen Sie die Determinante (2P) und die Spur (1P) der Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 Das Levi-Civita-Symbol**[5P]**

Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols und unter Verwendung von

$$\epsilon_{wlm} \epsilon_{wjv} = \delta_{lj} \delta_{mv} - \delta_{lv} \delta_{mj},$$

die Identität:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b},$$

für Vektorfelder $\vec{a}, \vec{b}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.**Aufgabe 7 * Linienintegral eines Kraftfeldes****[10P]**

Betrachten Sie das Kraftfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{w}$, dass durch die Vektoren $\vec{v} = (1, 0, 3)^T$ und $\vec{w} = (z, x, y)^T$ definiert ist. Berechnen Sie das Linienintegral $I_C = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, wobei die Kurve C ein Kreis mit Radius R um den Ursprung in der Ebene $\{(x, y, z = z_0) | x, y, z \in \mathbb{R}, z_0 = \text{const.}\}$ ist. Der infinitesimale Vektor $d\vec{s}$ verläuft entlang des Weges. Ist dieses Kraftfeld konservativ?

Hinweise:

- Bitte notieren Sie Ihren Namen auf jedem Blatt, das Sie abgeben.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt. Notieren Sie die Aufgaben-Nummer.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Zulässige Hilfsmittel: Ein handschriftlich beschriebenes DIN-A4-Blatt (doppelseitig). Kein Taschenrechner/Handy/o.ä.!

Viel Erfolg!