Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 9

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 Kraftfeld und Schraubenlinie (7 Punkte)

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -\lambda 3x + y, 2z)^{\mathrm{T}}$. In diesem Kraftfeld, ausgehend vom Punkt $(R,0,0)^{\mathrm{T}}$, führe nun ein Massenpunkt zwei volle Umdrehungen im Gegenuhrzeigersinn entlang einer Schraubenlinie aus, um schließlich zum Punkt $(R,0,2h)^{\mathrm{T}}$ zu gelangen. Der Radius der Schraubenlinie sei R und die Ganghöhe h, d.h. der Abstand übereinander liegender Punkte. Die Rotationsachse ist die z-Achse.

a) Berechnen Sie für $\lambda = 1$ die am Massenpunkt m durch das Kraftfeld $\vec{F}$ verrichtete Arbeit. (5P)

b) Für welches λ ist $\vec{F}$ konservativ? Wie lautet die Potentialfunktion ϕ, s.d. $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$? (2P)

Aufgabe 2 Volumenintegration (6 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen $V_{\mathrm{K}} = \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} A_{\mathrm{K}}(z)\,\mathrm{d}z$, des Körpers K durch Integration, wobei $A(z)$ die Querschnittsfläche des Körpers zur z-Achse ist. Der Körper K ist in der x-z-Ebene begrenzt auf das innere der Parabel $z = x^2$ für $x \in [-2,\, 2]$. Die Begrenzung in der x-y- Ebene ist durch Halbkreise im Halbraum $y > 0$ derart gegeben, dass sowohl der Anfang als auch das Ende des Halbkreises auf genau einem der Parabeläste liegt. (3P)

b) Ersetzen Sie den Halbkreis in der x-y-Ebene aus a) durch ein Rechteck, wobei y beschränkt sei auf $[-3,\, 3]$ für alle x, z um den Körper P zu erhalten. Berechnen Sie dessen Volumen, indem Sie entweder in der Volumenformel aus a) eine geeignete Querschnittsfläche einsetzen oder indem Sie das Volumen direkt durch $V_{\mathrm{p}} = \int\limits_{\mathrm{P}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ berechnen. (3P)

Aufgabe 3 * Ladungsdichte (6 Punkte)

Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ beschreibt die Verteilung von Ladung pro Volumen. Die Größe $Q = \int\limits_{\mathrm{V}} \rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}V'$, ist die im Volumen V' eingeschlossene Ladung.

a) Betrachten Sie konkret

$$\rho_1(\vec{r}) = q\,\left[(xyz+1)^2 + x^4 y^2 + z^2\right] \theta(3-|x|)\,\theta(4-|y|)\,\theta(5-|z|), \tag{1}$$

wobei θ die Heaviside Funktion und $q \neq 0$ die Elementarladung darstellt. Wo fällt die Ladungsdichte auf Null ab, d.h. welche Geometrie liegt $\rho_1(\vec{r})$ insgesamt zugrunde? Welche Ladung ist in diesem Volumen eingeschlossen? (3P)

b) Betrachten Sie jetzt

$$\rho_2(\vec{r}\,) \;=\; q\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,y^2\,\sinh(z)\;\theta(3-|x|)\,\theta(4-|y|)\,\theta(5-|z|)\;. \tag{2}$$

Welche Ladung ist jetzt enthalten? (3P)

Aufgabe 4 * Linienintegrale [8P]

a) Bestimmen Sie die notwendige Arbeit $W_\mathrm{C} \;=\; \int_\mathrm{C} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, um im Kraftfeld

$$\vec{F}_1 = \vec{e}_x\,\left(x^2+y^2+z^2\right) \;+\; \vec{e}_y\,(2yx+42) \;+\; \vec{e}_z\,y^2 \tag{3}$$

entlang eines Pfades C zu laufen. Bei C handele es sich um einen Kreis mit Radius R in der x-y-Ebene um den Ursprung. Welche Aussage können sie aus Ihrem Ergebnis für $\vec{F}_1$ ableiten? Ist dieses Kraftfeld konservativ? (4P)

b) Berechnen Sie die aufzuwendende Arbeit W_AB, die benötigt wird, um vom Punkt $\vec{A} = (0,\,0,\,0)^\mathrm{T}$ zum Punkt $\vec{B} = (1,\,-1,\,1)^\mathrm{T}$ entlang des Pfades D im Kraftfeldes $\vec{F}_2$ zu gelangen. W_AB ist durch das folgende Integral gegeben: (4P)

$$W_\mathrm{AB} = \int\limits_\mathrm{D} \left[2x+3\,(x+y)+1+3x^2\right]\,\mathrm{d}x \;+\; \left[3x+2y+y\,(2+6z^2y^4)\right]\,\mathrm{d}y \;+\; 2z\,(y^6+1)\,\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Der Pfad D ist über die kartesische Koordinate $x \in [0,\,1]$ parametrisiert und die Koordinaten für y, z entlang dieses Pfades ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} x^2y^2 + (x+1)(y+1)(z+1) \;&=\; 1, \\ z^{3/2} \;+\; xy \;+ 2\,e^{xz\,(x-1)} \;&=\; 2. \end{aligned}$$