Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 8

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechende Briefkästen.]

Aufgabe 1 Zylinderkoordinaten [8P]

Die Zylinderkoordinaten $\{\rho, \phi, z\}$ werden durch $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ in der kartesischen Basis wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos(\phi), \\ y &= \rho\sin(\phi), \\ z &= z, \end{aligned}$$

mit $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $z \in (-\infty, \infty)$.

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_z$ indem sie $\vec{r}$ nach der jeweiligen Größe ableiten und sie normieren. (3P)

b) Zeigen Sie anschließend, dass diese drei Vektoren ein vollständiges Orthonormalsystem bilden und skizzieren Sie $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\phi$ für ein festes ρ und $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Wie liegt $\vec{e}_z$ bezüglich $\vec{e}_\rho$ und $\vec{e}_\phi$ im Raum? (4P)

c) Stellen Sie den Vektor $\vec{r}$ als Linearkombination von $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_z$ dar,

$$\vec{r} = a\,\vec{e}_\rho + b\,\vec{e}_\phi + c\,\vec{e}_z\,.$$

Was ergibt sich für a, b und c? (1P)

Aufgabe 2 *Gradient und Divergenz [7P]

a) Berechnen Sie den Gradienten folgender Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(\rho, \phi, z) = \rho, \quad f(\rho, \phi, z) = \sin(\phi)\,\frac{z^2}{\rho + 1}, \quad f(\rho, \phi, z) = e^{\rho\cos(\phi)},$$

in Zylinderkoordinaten $\{\rho, \phi, z\}$. (3P)

b) Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\vec{A}(\rho, \phi, z) = \vec{e}_\rho, \quad \vec{A}(\rho, \phi, z) = \vec{e}_\phi, \quad \vec{A}(\rho, \phi, z) = \rho^2\vec{e}_\rho + \rho\cos(\phi)\,\vec{e}_\phi + z\sin(\phi)\,\vec{e}_z,$$

bezüglich der kartesischen, als auch der Zylinderkoordinaten. (4P)

Aufgabe 3 *Parabolische Koordinaten **[4P]**

Die parabolischen Koordinaten $u, v \in \mathbb{R}^+$ sind gegeben durch die Transformationsgleichungen

$$x = uv, \quad y = (v^2 - u^2)/2.$$

a) Skizzieren Sie in der x, y-Ebene die Kurven mit konstantem u bzw. v. (1P)

b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v$, und zeigen Sie, dass sie orthogonal sind. (3P)

Aufgabe 4 Elektrisches Feld einer Punktladung **[5P]**

Das Elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}\,) : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ einer Punktladung $q \in \mathbb{R}$ lokalisiert im Ursprung lautet:

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3},$$

wobei $\vec{r}$ der Ortsvektor ist.

a) Skizzieren Sie das elektrische Feld qualitativ in der x-z- Ebene für $q/(4\pi\epsilon_0) > 0$. Zeichnen Sie dabei die Äquipotentiallinien ein. Welche Symmetrie liegt diesem Problem *insgesamt* zugrunde? (2P)

b) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation dieses Feldes in den der Symmetrie angepassten Koordinaten. Welchen Rückschluss lässt Ihr Ergebniss für die Rotation auf das Feld zu? (3P)