Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 7

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 * Der Nabla Operator $\vec{\nabla}$ [11 P]

Es seien $\phi(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte, skalare Funktion und $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{v}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glatte Vektorfelder und $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ bezeichne den Ortsvektor.

a) Schreiben Sie den Gradienten von ϕ und die Divergenz von $\vec{A}$ in Kartesischen Koordinaten explizit aus. Wie veränderen sich diese Ausdrücke, falls ϕ und $\vec{A}$ doch nicht von z abhängen sollten? (1P)

b) Zeigen Sie, mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols ϵ_{ijk} folgende Identitäten:

i) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0}$, (2P)

ii) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$, (2P)

iii) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right] - \Delta\vec{A}$, (2P)

iv) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{v} \times \vec{A}\right) = \vec{v}\left[\mathrm{div}\vec{A}\right] - \vec{A}\left[\mathrm{div}\,\vec{v}\right] + \left[\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right]\vec{v} - \left[\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right]\vec{A}$, (2P)

v) $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi\vec{A}\right) = \left[\vec{\nabla}\phi\right] \cdot \vec{A} + \phi\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right]$. (2P)

Hinweis: Der Laplace Operator wirkt komponentenweise auf Vektoren.

Aufgabe 2 Charakterisierung von Raumkurven [6P]

Gegeben sei die Schraubenlinie $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}\,(t) = (R\cos(\omega t),\, R\sin(\omega t),\, vt)^{\mathrm{T}}, \quad R, v > 0 \text{ und konstant.}$$

a) Finden Sie die Bogenlänge $s(t)$ (mit beliebigem Bezugspunkt t_0), das begleitende Dreibein, d. h. $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ (siehe Vorlesung), die Krümmung κ und die Torsion τ.

b) Zeigen Sie, dass die dritte Frenetsche Formel

$$\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}s} = \tau\,\hat{b} - \kappa\,\hat{t},$$

erfüllt ist.

Hinweis: T bedeutet die Transponierung eines Vektors, d.h. $(1,\,2,\,3)^{\mathrm{T}} = 1\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + 3\,\vec{e}_z$.

Aufgabe 3 Zu Divergenz und Rotation **[6P]**

Es gelte $\vec{r} = (x,\, y,\, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{A}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{r}$.

b) Sei $\vec{A}(\vec{r}) = (x + 3y,\, y - 2z,\, x + \alpha z)^{\mathrm{T}}$ in Kartesischer Basis. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\vec{A}$ quellenfrei (d.h. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$)?

c) Sei $\vec{A}(\vec{r}) = (xz^3,\, -2x^2yz,\, 2yz^4)^{\mathrm{T}}$ in Kartesischer Basis. Bestimmen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ im Punkt $(1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

d) Sei $\vec{A}(\vec{r}) = (x + 2y + \alpha z)\,\vec{e}_x + (\beta x - 3y - z)\,\vec{e}_y + (4x + \gamma y + 2z)\,\vec{e}_z$. Für welche $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}$ ist $\vec{A}(\vec{r})$ wirbelfrei (d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = 0$)?

e) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right)$ für $\phi = \sin(x) + x^2\, y\, z$.

f) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right]$ für $\vec{A} = \left(y^2\, z^2,\, x^2 z^2,\, x^2 y^2\right)^{\mathrm{T}}$.

Hinweis: T bedeutet die Transponierung eines Vektors, d.h. $(1,\, 2,\, 3)^{\mathrm{T}} = 1\,\vec{e}_x + 2\,\vec{e}_y + 3\,\vec{e}_z$.