Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 6

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 Reziprokes Gitter [8P]

In einem Kristall sind Atome in einem regelmäßigen Gitter angeordnet, das durch drei linear unabhängige Gittervektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ vollständig beschrieben wird. Das sogenannte *reziproke Gitter* wird von den Vektoren

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}, \qquad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

beschrieben.

a) Zeigen Sie für $i, j = 1, 2, 3$ die Beziehung $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\, \delta_{ij}$. (6P)

b) Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ spannen die sogenannte *Elementarzelle* (Parallelepiped) auf. Ihr Volumen sei V_a. Zeigen Sie, dass die Elementarzelle des reziproken Gitters durch $V_b = (2\pi)^3 / V_a$ gegeben ist. (2P)

Aufgabe 2 Ableitungen [5P]

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

a) $\partial_a \sqrt{y^2 + a^2}$ (1P),

b) $\partial_c \left[e^{\sin^2(x)} + \sqrt{\tan(x)}\right] \ln\left[\frac{ax^3 + bx + c}{\cos(x)} + \tanh(x)\right]$, (1P)

c) $\partial_x\, e^{y^2 - x^2}$, (1P)

d) $\mathrm{d}^2 f(x(t), y(t))/dt^2$ für $f(x, y) = x + y^2$ mit $x(t) = \cos(t)$ und $y(t) = \sin(t)$. Nutzen Sie hier explizit die Ableitungsregel bei totaler Zeitableitung! (2P)

Aufgabe 3 * Determinante **[5P]**

a) Berechnen Sie die folgenden Determinanten: (2P)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

b) Für welche $k \in \mathbb{R}$ verschwindet die Determinante? (2P)

$$D(k) = \begin{vmatrix} 1 & 2-k & 0 \\ k^2-1 & -k^2 & 4-k \\ k & 2k-3 & 0 \end{vmatrix}.$$

c) Zeigen Sie: (1P)

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 4 * (Totales) Differential **[8P]**

a) Zeigen Sie, dass es sich bei (1P)

$$\omega(x,y) \;=\; -(y^2 + xy)\,\mathrm{d}x \;+\; (x^2 + xy^3)\,\mathrm{d}y, \quad x,\, y \in \mathbb{R}$$

nicht um ein (totales) Differential handelt.

b) Bilden Sie nun die Differentialform (2P)

$$g \;=\; \frac{1}{xy^2}\,\omega(x,y) \;=\; a(x,y)\,\mathrm{d}x \;+\; b(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

und zeigen Sie, dass es ein Differential ist, d.h. $\exists\, f$ mit $\mathrm{d}f = g$.

c) Es soll nun die Funktion $f(x,y)$ bestimmt werden. (5P)

i) Integrieren Sie dazu $a(x,y)$, was gerade $\partial_x f(x,y)$ entspricht, in x. Erfüllt die so gefundene Funktion $g_1(x,y)$ auch die Integrabilitätsbedingung $\partial_y f_1(x,y) = b(x,y)$?

ii) Integrieren Sie nun die Beziehung $\partial_y f(x,y) = b(x,y)$ in y. Erfüllt die so gefundene Funktion $f_2(x,y)$ auch die Integrabilitätsbedingung $\partial_x f_2(x,y) = a(x,y)$?

iii) Wie lassen sich die beiden Resultate f_1 und f_2 in Einklang miteinander bringen? Bestimmen Sie $f(x,y)$.