Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 5

[Beachte: Aufg. mit (*) sind schriftlich jeden Mi vor 08:00 in die entsprechenden Briefkästen abzugeben.]

Aufgabe 1 Die Dreiecksungleichung [4P]

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Dreiecksungleichung:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b,$$

mit $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$.

(b) Zeigen Sie außerdem:

$$|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b.$$

Beachte: $|\cdot|$ bezeichnet hier die euklidische Norm eines Vektors als auch den Betrag eines Skalars.
Hinweis: Sie können die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Aufgabe 2 Lineare Unabhängigkeit [4P]

(a) Gegeben seien drei Vektoren des $\mathbb{R}^4$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, ob diese Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie den Vektor $\vec{u} = (1, 2, 2)^T$ in dieser Basis dar.

Aufgabe 3 Der P_2 [6P]

Betrachten Sie die Menge aller Quadratpolynome:

$$P_2 := \left\{ ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

und zeigen Sie, dass diese Menge einen Vektorraum über $\mathbb{R}$bezüglich der Addition im $\mathbb{R}$ und der reellen Skalarmultiplikation $(\cdot)$ bildet. Zeigen Sie anschließend, dass $\left\{1, x, x^2\right\}$ eine Basis dieses Raumes darstellt.

Aufgabe 4 *Das Levi-Civita Symbol (Epsilon-Tensor) **[8 P]**

(a) Begründen Sie, dass der Epsilontensor ϵ_{ijk} $(i,\, j,\, k = 1, \ldots, 3)$ auch als folgende Determinante geschrieben werden kann:

$$\epsilon_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix},$$

wobei δ_{nm} das Kronecker-Delta ist.

(b) Leiten Sie die folgende Identität

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl},$$

durch explizite Rechnung und unter Verwendung von (a) nach.

Aufgabe 5 *Vektorprodukt **[6P]**

Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie mit Hilfe des Levi-Civita Symbols:

(a) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$,

(b) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\, \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$,

(c) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\, \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$.