Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 4

[Beachte: Aufg. mit (*) sind schriftlich jeden Mi vor 08:00 in die entsprechenden Briefkästen abzugeben.]

Aufgabe 1 Taylorentwicklung I [5P]

Entwickeln Sie folgende Funktionen $f(x)$ bis zur einschließlich dritten Ordnung in eine Taylorreihe um die Stelle $x_0 = 1$:

$$\text{(a) } (1+2x)^\beta, \quad \text{(b) } a^x, \quad \text{(c) } \ln(x),$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $a \in (0, \infty)$. Entwickeln Sie ferner die folgenden Funktionen um $x_0 = 0$:

$$\text{(d) } \sin(x), \quad \text{(e) } \cos(x),$$

bis einschließlich vierter Ordnung.

Aufgabe 2 Sinus und Kosinus [3P]

Schreiben Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die folgenden Ausdrücke so um, dass in den resultierenden Ausdrücken sin und cos nur von einer Variable abhängen:

$$\text{(a) } \sin(\alpha \pm \beta), \quad \text{(b) } \cos(\alpha \pm \beta).$$

Was ergibt sich für die Doppelwinkelfunktionen $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$? Zeigen Sie außerdem die folgende Identität:

$$\text{(c)} \quad \sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) .$$

Aufgabe 3 Komplexe Zahlen [3P]

Berechnen Sie die folgenden komplexen Wurzeln und geben Sie jeweils alle paarweise unterschiedlichen Lösungen an:

$$\text{a) } \sqrt[3]{8i}, \quad \text{b) } \sqrt{2\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}, \quad \text{c) } \sqrt[3]{2\exp\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

Aufgabe 4 Relativistische Korrekturen **[4P]**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m und Geschwindigkeit v in einer Dimension. Die relativistischen Ausdrücke des Impulses p und der Energie E lauten:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

mit $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. Wie hängt E vom Impuls p ab? Entwickeln Sie $E(p)$ im nichtrelativistischen Limes $p/mc \ll 1$ (bzw. $v/c \ll 1$) bis zur dritten Ordnung in p/mc.

Aufgabe 5 *Taylorentwicklung II **[6P]**

(a)2P Verwenden Sie die Talorreihen von $\sin(y)$ und $\cos(x)$ um $y_0 = x_0 = 0$ bis einschließlich zweiter Ordnung und ersetzen Sie dann y durch die Entwicklung von $\cos(x)$, um eine Näherung für $\sin[\cos(x)]$ zu erhalten. Berechnen Sie die Differenz zur Taylorreihe von $f(x) = \sin[\cos(x)]$ in x um $x_0 = 0$ bis einschließlich zweiter Ordnung.

(b)4P Betrachten Sie nun die Funktion $f[g(x)]$ und verfahren Sie nach gleichem Schema. Wann unterscheiden sich beide Vorgehensweisen und wann nicht?

Aufgabe 6 *Hyperbel **[4P]**

Gegeben sei die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

(a) Drücken Sie den Kurvenverlauf der Hyperbel im ersten Quadranten durch eine von x abhängige Funktion $f(x)$ aus.

(b) Finden Sie eine nicht-triviale Approximation (d.h. einen Ausdruck, der über einen konstanten Term hinaus geht) von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$.