Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Methoden”
Blatt 3

[Beachte: Aufg. mit (*) sind schriftlich jeden Mi vor 08:00 in die entsprechenden Briefkästen abzugeben.]

Aufgabe 1 Gaußsches Integral [4P]

Berechnen Sie das Gaußsche Integral, d.h. zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

dabei sind $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{R}^+$. Verwenden Sie dazu die Integrale

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)^2, \qquad G(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $F'(t) = -G'(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$ und daher $F(t) + G(t) = c\ \forall t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ gilt. Um c zu bestimmen, werten Sie $F(t)$ und $G(t)$ bei $t = 0$ aus.

Aufgabe 2 Realisierung der Delta-Distribution [4P]

Die Delta-Distribution kann als Grenzwert einer Funktionenfolge verstanden werden. Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$\delta_n(x-x_0) = \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{n^2+(x-x_0)^2},$$

und zeigen Sie dass der Grenzwert dieser Folge die Delta-Distribution ergibt, d.h.

$$\lim_{n\to 0} \delta_n(x-x_0) = \delta(x-x_0).$$

Aufgabe 3 * Delta-Distribution einer Funktion [4P]

Sei $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit n einfachen Nullstellen x_i, wobei $i = 1, \ldots, n$. Somit ist $f(x)$ bijektiv (d.h. in diesen Umgebungen existiert eine Umkehrfunktion) in den Intervallen $(x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ mit $0 < \epsilon \ll 1$. Zeigen Sie, dass

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$$

gilt, indem Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x))g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} g(x)\,\mathrm{d}x$$

zeigen. Hierbei ist $g(x)$ eine Testfunktion.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst in welchen Regionen das Integral einen Beitrag liefert und substituieren Sie anschließend $u = f(x)$.

Aufgabe 4 * Die Gammafunktion **[4P]**

Die Eulersche Gammafuntktion ist für $x > 0$ definiert durch das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

(a)[1] Zeigen Sie durch partielle Integration die folgende Eigenschaft der Gammafuntion:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x).$$

(b)[2] Benutzen Sie dieses Ergebnis um für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\Gamma(n+1) = n!$ zu beweisen.

(c)[1] Welcher Wert ergibt sich für $\Gamma(1/2)$?