Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 13

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 * Matrixmultiplikation [10P]

Berechnen Sie aus den gegebenen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

die folgenden Produkte (falls existent!): BA, BC, DB, $C^{\mathrm{T}}A$, CA, AD, $(AD)^{\mathrm{T}}$, DA, DB^{T}, $C^{\mathrm{T}}C$ und $D^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

Hinweis: Die Operation T bedeutet die Transponierung der jeweiligen Matrix.

Aufgabe 2 Drehung im $\mathbb{R}^3$ [10P]

Jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Matrix D darstellen, sodass ein Vektor $\vec{r} = (x,\, y,\, z)^{\mathrm{T}}$ auf einen Vektor $\vec{r}\,' = (x',\, y',\, z')^{\mathrm{T}}$ durch

$$\vec{r}\,' = D\,\vec{r},$$

abgebildet wird.

(i) Berechnen Sie die Matrix D für die folgenden Fälle:

a) eine Rotation um einen Winkel $\phi \in [0,\, 2\pi)$ um die z-Achse, (4P)

b) eine Rotation um einen Winkel $\theta \in [0,\, 2\pi)$ um die y-Achse. (4P)

(ii) Berechnen Sie außerdem D^{T} und $D^{\mathrm{T}}D$ für D aus a). Um welche Matrix handelt es sich bei D^{T}? (2P)

Hinweis: Machen Sie sich eine Skizze und ermitteln Sie die Wirkung der jeweiligen Rotation komponentenweise für $\vec{r}\,'$. Die Matrix D erhalten Sie indem Sie die Matrixmultiplikation „rückwärts“ ausführen und $\vec{r}$ aus $\vec{r}\,'$ „rausziehen“.

Aufgabe 3 * Lineare Operatoren **[8P]**

Gegeben seien die Polynome $p_0, \ldots, p_3$ mit $p_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei g der Grad des Polynoms ist. In kompakter Form ist also

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c_1\, x \,+\, c_0 \\ b_2\, x^2 \,+\, b_1\, x \,+\, b_0 \\ a_3\, x^3 \,+\, a_2\, x^2 \,+\, a_1\, x \,+\, a_0 \end{pmatrix},$$

mit reellen Koeffizienten $d,\, c_1,\, c_2,\, b_2,\, b_1,\, b_0,\, a_3, \ldots,\, a_0 \,\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stellen Sie den Ableitungsoperator ∂_x in der Basis $\{p_0,\, p_1,\, p_2,\, p_3\}$ als Matrix dar.

Aufgabe 4 Determinante **[8P]**

a) Die Determinante einer Matrix weist viele nützliche Eigenschaften auf. Beispielsweise gilt:

   i) $\det(A\,B) \;=\; \det(A)\det(B)$,

   ii) $\det(\alpha\, A) \;=\; \alpha^N \det(A)$,

   iii) $\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) \;=\; \det(A)$,

   für $A,\, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Weisen Sie die Eigenschaften i)-iii) explizit für die Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

   nach. (3P)

b) Zeigen Sie die Basisinvarianz der Determinante für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Berechnen Sie dazu die Determinante der Basistransformierten Matrix $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$, die durch $B = S^{-1}\, A\, S$, für $S \in \mathbb{C}^{N\times N}$ und S nicht singulär, gegeben ist. (2P)

c) Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt schiefsymmetrisch oder antisymmetrisch falls $A^{\mathrm{T}} = -A$ gilt. Zeigen Sie, dass die Determinante einer antisymmetrischen Matrix für jedes ungerade $N \in \mathbb{N}$ immer Null ist. (3P)