Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 12

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 *Sätze von Stokes & Gauß [10P]

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{A} = y\,\vec{e}_x - x\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

a) Ist dieses Vektorfeld ein Gradientenfeld? Hat das Vektorfeld Quellen oder Senken? (2P)

b) Betrachten Sie nun die Fläche, die durch den Halbkreis mit Radius R um den Ursprung, in der Ebene $z = 0$ mit $y \geq 0$ definiert ist. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Stokes bei der Integration von $\vec{A}$ entlang der (orientierten) Kontur dieser Fläche, mit Flächennormalenvektor $\vec{e}_z$. (3P)

c) Verifizieren Sie die Gültigkeit des Satzes von Gauß für eine Integration des Vektorfeldes über die Oberfläche eines (geschlossenen) Zylinders (Radius R, Höhe h), der koaxial zur z-Achse mit einer Ausdehnung $0 \leq z \leq h$ ausgerichtet ist. (3P)

d) Berechnen Sie den Fluss des Feldes durch eine Kugelschale mit Radius $R = 5$, die um den Ursprung zentriert ist. (2P)

Aufgabe 2 Klassisches Teilchen im elektromagnetischem Feld [10P]

Auf ein geladenes Teilchen (Ladung q) wirkt in einem elektromagnetischen Feld die Kraft $\vec{F}_L = q\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]$, wobei $\vec{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das elektrische Feld und $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die magnetische Flussdichte darstellt. Der (momentane) Geschwindigkeitvektor $\vec{v}(t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens liegt tangential zu seiner Bahnkurve $\vec{r}(t)$, d.h. zum gleichen Zeitpunkt t gilt: $\vec{v} \parallel \vec{r}$.

a) Berechnen Sie die am Teilchen verrichtete Arbeit $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}_L \cdot d\vec{r}$, wenn es sich vom Ursprung, $\vec{r}_0 = \vec{0}$, zum Ort $\vec{r}_1 = (1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$ bewegt, für $\vec{B} = (y,\, x,\, -x^2 y)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{E} = (x,\, y,\, z)^{\mathrm{T}}$ in kartesischen Koordinaten. (4P)

b) Wiederholen Sie Aufgabenteil a) für zwei allgemeine Felder $\vec{B}$ und $\vec{E}$. Sie dürfen dabei verwenden, dass das elektrische Feld ein Gradientenfeld ist, d.h. es existiert eine glatte Funktion $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. (3P)

c) Weisen Sie die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung $\partial_t\,\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ für die Felder aus a) nach. Ermitteln Sie dafür zunächst die Ladungsdichte ρ aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ und anschließend die Stromdichte $\vec{j}$ aus $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$. (3P)

Hinweis: Machen Sie sich für a) eine Skizze und überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen $d\vec{r}$ und $\vec{v}$.

Aufgabe 3 * Greensche Identität **[3P]**

Gegeben seien zwei skalare, mindestens zweimal differenzierbare Felder $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die folgende Identitiät:

$$\oint_S (\Phi\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Phi) \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \int_V (\Phi\Delta\Psi - \Psi\Delta\Phi)\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei V der Raumbereich ist, der von der Fläche $S = \partial V$ begrenzt wird.

Aufgabe 4 Integraldarstellung der Divergenz **[4P]**

Die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kann geschrieben werden als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_0) = \lim_{\substack{V\to 0\\ \mathbf{r}_0\in V}} \frac{1}{V} \oint_{\partial(V)} \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{A}(\vec{r})\,.$$

Gezeigt werden soll die Gültigkeit am Ursprung $\vec{r}_0 = \vec{0}$ für den Fall eines *radialsymmetrischen* Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = A(r)\,\vec{e}_r$.

a) Welchen Wert muss $\vec{A}(\vec{0})$ haben?

b) Bestimmen Sie die linke Seite der Gleichung in Kugelkoordinaten.

c) Wählen Sie V als eine Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und berechnen Sie die rechte Seite.

d) Zeigen Sie für diese Wahl die Gleichheit. Hinweis: Satz von L'Hopital.