Universität Regensburg SS 2019
Dr. P. Wenk
B. Geiger, N. Leumer, M. Nitsch, A. Rabenstein, A. Rib

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Methoden"
Blatt 11

[Beachte: Aufg. mit (*) sind jeden Mi vor 8:00 schriftlich abzugeben. Ort: entsprechenden Briefkästen.]

Aufgabe 1 Trägheitsmomente [6P]

Berechnen Sie das Trägheitsmoment $J = \int_V \vec{r}_\perp^{\,2}\, \rho(\vec{r})\, dV$ für die folgenden starren Körper mit der jeweiligen Massendichte $\rho(\vec{r})$ und Rotationsachse $\vec{\omega}$. Beachten Sie: $\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega} = 0$.

a) Ein Hohlzylinder $\left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -h \le z \le h,\, r_1^2 \le x^2 + y^2 \le r_2^2\right\}$ $(h > 0, r_2 > r_1 > 0)$ mit $\rho(\vec{r}) = const$ und $\vec{\omega} = \vec{e}_x$. (2P)

b) Der Hohlyzylinder aus a) mit konstanter Massendichte und $\vec{\omega} = \vec{e}_z$. (2P)

c) Eine Kugel mit R um den Urspung mit konstanter Massendichte und $\vec{\omega} = \vec{e}_y$. (2P)

Aufgabe 2 * Doppelintegrale [5P]

Skizziere Sie die entsprechende Menge $\mathcal{M}$ und berechnen Sie dann die folgenden Doppelintegrale über der Menge mit entsprechenden Integrationsgrenzen:

a) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, x \le y \le \sqrt{x}\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

b) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \le y,\, y + x^2 \le 3\}$ und $\int_{\mathcal{M}} x^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

c) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x^2,\, 0 \le x \le 2\}$ und $\int_{\mathcal{M}} \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

d) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + 4y^2,\, x^2 + y^2 \le 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} (|x| + |y|)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

e) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + 4y^2,\, x^2 + y^2 \le 1\}$ und $\int_{\mathcal{M}} xy\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Aufgabe 3 Flüsse durch geschlossene Oberflächen [6P]

Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die geschlossene Oberlfäche des jeweiligen Körpers. Die vektorwertige Funktion $\vec{A}$ ist in a) und c) in kartesischen, aber in b) in spährischen Koordinaten angegeben.

a) $\vec{A} = (x + y,\, y + z,\, z)^{\mathrm{T}}$, Würfel mit $\left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1,\, |y| \le 1, |z| \le 1\right\}$. (2P)

b) $\vec{A} = r^3\, \vec{e}_r \,+\, r^2\, (\sin(\theta) + \phi)\, \vec{e_\phi}$, Kugel mit Radius R um den Ursprung. (2P)

c) $\vec{A} = (xy,\, x,\, z)^{\mathrm{T}}$, Halbkugel *mit* Boden $\left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \le R \text{ und } z \ge 0\right\}$. (2P)

Aufgabe 4   * Fluss durch einen geschnitten Quader **[6P]**

Der Quader Q mit $h > 0$ sei gegeben durch $\left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq h,\, 0 \leq y \leq h, 0 \leq z \leq h\right\}$. Die Punkte $(-h, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(-h, h, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 0, h)^{\mathrm{T}}$ und $(0, h, h)^{\mathrm{T}}$ definieren eine Ebene E die durch den Quader läuft und in zwei Teile zerlegt. Berechnen Sie zunächst explizit den Fluss von $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die größere der beiden Schnitthälften, wobei $\vec{F} = (y,\, z,\, x)^{\mathrm{T}}$. Wie kann man das Ergebnis auch leichter erhalten?