UR Formale Methoden der Sprachwissenschaft

Formale Semantik II: Prädikatenlogik (Skript 2014)

Sprachwissenschaft
Universität Regensburg
Jürgen Reischer

Einführung

- Die Prädikatenlogik kann als Erweiterung der Aussagen-logik verstanden werden, um die semantische Struktur eines Aussagesatzes noch genauer zu analysieren:
  - Dafür bietet die Prädikatenlogik einen gegenüber der Aussagenlogik leistungsfähigeren Formalismus:
    - Dies erlaubt auch die Analyse und Beschreibung der *inneren Struktur* einer elementaren Aussage;
    - in der Aussagenlogik hingegen wurde jede elementare Aussage als nicht weiter zerlegbar betrachtet.
  - Die Prädikatenlogik ermöglicht dadurch eine detailliertere universelle Repräsentation der Bedeutung von Aussagesätzen und der Darstellung von Argumenten (Schlüssen).

Einführung

- In der Prädikatenlogik wird jede aussagenlogisch elementare Aussage als zusammengesetzt aus *Subjekt*, *Prädikat* und eventuell(en) *Objekt(en)* betrachtet:
  - Jedes *Prädikat* macht selbst bereits eine Aussage über das Subjekt und eventuelle Objekte, die als wahr oder falsch beurteilt werden kann (z. B. "Max *schläft*.", "Mia *ist blond*.", "Max *mag* Mia." usw.);
  - der Begriff des Subjekts, Prädikats und Objekts ist in der Logik weiter zu fassen als in der Linguistik:

Einführung

- Als Prädikat wird jeder sprachliche Ausdruck betrachtet, der mindestens eine 'Leerstelle' (Platzhalter) besitzt:
  - Die Leerstelle wird durch ein Subjekt und (k)ein bzw. mehrere Objekte gefüllt, die das Prädikat vervollständigen;
  - bspw. benötigen die Verben "schlafen" ein Subjekt und "mögen" sowohl Subjekt wie Objekt, das Adjektiv "blond" ein Subjekt im logischen Sinne (*wer* ist blond?), die Präposition "zwischen" ein Subjekt und zwei Objekte (*was* ist zwischen *was* und *was*?) usw.
- Subjekt oder Objekt(e) ist jeder sprachliche Ausdruck, der die Leerstellen eines Prädikats ausfüllen kann:
  - Subjekt/Objekt(e) werden auch die *Argumente* eines Prädikats genannt;
  - der selbe sprachliche Ausdruck kann sowohl die Funktion eines Subjekts als auch eines Objekts einnehmen.

Einführung

- Durch das Auffüllen ('Besetzen', 'Sättigen') der Leerstellen eines Prädikats entsteht eine im *prädikatenlogischen* Sinne vollständige, wahrheitsfähige Aussage:
  - Das Prädikat oder Subjekt/Objekt(e) alleine ist in der Regel noch kein wahrheitsfähiger Teil eines Aussagesatzes;
  - Ausnahmen sind Sätze wie "Es regnet.", die über kein eigentliches (*semantisch* relevantes) Subjekt verfügen:
    - Sie verhalten sich genau wie elementare Aussagen in der Aussagenlogik, deren innere Prädikat-Argument-Struktur ignoriert wird;
    - aussagenlogische Sätze ohne solche Binnenstruktur sind damit nur ein 'Sonderfall' prädikatenlogischer Aussagesätze und können auch in der Prädikatenlogik verwendet werden (sie sind *als Ganzes* wahr/falsch).

Terminologie/Begrifflichkeit

- Der linguistische vs. logische Begriff des Subjekts/ Objekts und Prädikats lässt sich am besten durch die Unterscheidung syntaktisch vs. semantisch fassen:
  - Das *linguistische* Subjekt/Objekt vs. Prädikat zeigt sich an zwei *formal-syntaktischen* Eigenschaften:
    - *Kasus* (Fall): Das Subjekt steht meist im Nominativ, Objekt(e) im Genitiv, Dativ und/oder Akkusativ (und evtl. weiteren Kasus):

Kasus	Beispiel (Subjekt/Objekt kursiv)	
Nominativ-*Subjekt*	"*Max* schläft.", "*Max* mag Mia."	(wer/was?)
Genitiv-*Objekt*	"Max gedenkt *Mia*."	(wessen?)
Dativ-*Objekt*	"Max hilft *Mia*."	(wem?)
Akkusativ-*Objekt*	"Max mag *Mia*."	(wen/was?)

Terminologie/Begrifflichkeit

- *Kategorie* (Wortart):
  - Subjekt/Objekte sind meistens Nomen (Substantive) bzw. ganze Wortgruppen aus Artikel/Adjektiv/Nomen (u. a.), Pronomen (Stellvertreter-Wörter) oder auch ganze Sätze;
  - Prädikate sind zumeist Verben oder Verbalgruppen.

Beispiele:

Subjekt	Prädikat	Objekt(e)
Max/Er	schläft	
Der kleine Max	wird-gemocht-von	seiner großen Schwester Mia
Mia	nimmt-an	dass Max schläft
Dass es regnet	ist-ungünstig	
(Es)	friert	ihn

Terminologie/Begrifflichkeit

- Das *logische* Subjekt/Objekt vs. Prädikat lässt sich hingegen eher an *inhaltlich-semantischen* Eigenschaften festmachen:
  - Dies betrifft zum einen die Frage nach der eigentlich zugrunde liegenden *semantischen* Argumentstruktur, d. h. wie viele Argumente benötigt ein Prädikat *aufgrund seiner Bedeutung* und *Funktion* tatsächlich:
    - Dabei bestimmt nicht die syntaktische Kategorie eines Wortes über den Status als Prädikat vs. Subjekt/Objekt, sondern allein seine Bedeutung;
    - auch andere Kategorien neben Verben können so Prädikatsstatus erlangen (Prädikate kursiv):

Terminologie/Begrifflichkeit

Kategorie	Beispiel	Argumente
Nomen	"Vater" "Suche" "Zerstörung"	'jmd. *ist Vater von* jmd.' '*Suche von* jmd. *nach* etwas' '*Zerstörung von* etwas *durch* etwas'
Adjektiv	"grün" "stolz auf" "größer als"	'etwas *ist grün*' 'jmd. *ist stolz auf* etwas' 'etwas *ist größer als* etwas'
Adposi-tion	"auf" "zwischen" "gemäß"	'etwas *ist auf* etwas' 'etwas *ist zwischen* etwas *und* etwas' 'etwas *ist* etwas *gemäß*'

Die Leerstellen (Argumente) des Prädikats können durch Pronomen verschiedener Art ("etwas"/"jemand", "wer"/"wessen"/"wem"/"wen"/"was") deutlich gemacht werden.

Terminologie/Begrifflichkeit

- Zum anderen betrifft dies auch die Frage, welche semantische Rolle ein Teilausdruck in einem Aussagesatz je nach Interpretation tatsächlich spielt (Ambiguitäten):
  - Ausdruck ist Subjekt oder Objekt:
    - *Subjekt als das, was handelt/tut*;
    - *Objekt als das, was von der Handlung betroffen ist*.
  - Beispiel "Tiere jagen":
    - "Tiere" ist Subjekt: 'die Tiere selbst jagen etwas' (z. B. andere Tiere);
    - "Tiere" ist Objekt: 'etwas/jemand jagt die Tiere' (z. B. andere Tiere oder Menschen).

Terminologie/Begrifflichkeit

Dass syntaktisches und semantisches Subjekt bzw. Objekt demnach nicht immer identisch sein müssen, zeigen auch folgende Beispiele:

Phänomen	Beispiel	Erläuterung
Subjekt-lose Sätze	1) "Es regnet." 2) (lat.) "Cantat." (dt. 'er/sie/es singt')	Satz 1) besitzt ein syntaktisches, aber kein semantisches Subjekt (man kann nicht sinnvoll danach fragen, wer oder was regnet); Satz 2) besitzt ebenfalls kein syntaktisches, jedoch zumindest ein semantisches Subjekt: Hier lässt sich sinnvoll danach fragen, wer oder was singt (im Lateinischen kann das Subjekt des Satzes weggelassen werden).

Terminologie/Begrifflichkeit

Phänomen	Beispiel	Erläuterung
Aktiv- vs. Passivsatz	1) "Max mag Mia." 2) "Mia wird von Max gemocht."	Das *syntaktische* Subjekt in Satz 1) ist "Max", in Satz 2) hingegen ist es "Mia"; das *semantische* Subjekt ist jeweils 'Max' (außer man legt ein eigenes Passivverb "wird-gemocht" zugrunde).
Ellipse (Auslas-sung von Sprach-material)	1) "Max isst." 2) "Max isst einen Apfel."	In Satz 1) ist "Max" das Subjekt, über den die Aussage gemacht wird, dass er isst; Essen setzt jedoch voraus, dass man *etwas* isst, was in Satz 1) syntaktisch nur nicht ausgedrückt ist, obgleich es semantisch unausgesprochen vorhanden sein *muss*. In Satz 2) ist es syntaktisch auch explizit ausgedrückt.

Prädikate

- Da neben Verben auch Nomen, Adjektive und Adpositionen logische Prädikate sein können, finden sich in Aussagen oft *mehrere* Prädikat-Argument-Strukturen:

Beispielaussage	logische *Prädikate* und <u>Subjekte/Objekte</u>
"Der kleine Max mag seine große Schwester Mia."	'Max *ist-klein*', 'Max *mag* Mia', 'Max *hat* eine Schwester', 'Mia *ist-die-Schwester-von* Max', 'Max Schwester *ist-größer/älter-als* Max'
"Max der Magier, der eine Schwester und Assistentin namens Mia hat, ist erfolgreich mit seiner Show."	'Max *ist* ein Magier', 'Max *hat* eine Schwester', 'Max Schwester *heißt* Mia', 'Max Assistentin *heißt* Mia', 'Max Schwester *ist* seine Assistentin' (und umgekehrt), 'Max *hat/gibt* eine Zaubershow', 'die Zaubershow *ist erfolgreich*'

Prädikate

* Dabei ist zu beachten, dass das logische Prädikat auch aus mehreren Wörtern bestehen kann:

Beispielaussage	logisches Prädikat
"Die Erde ist rund.", "Die Erde ist eine Kugel."	'rund-sein', 'Kugel-sein'
"Einstein ist ein Mensch/Physiker."	'Mensch/Physiker-sein'
"Max freut sich." "Max freut sich über seinen Erfolg."	'sich-freuen' 'sich-freuen-über'
"Max ist des Wahnsinns."	'des-Wahnsinns-sein'
"Die Erde umkreist die Sonne." "Die Erde kreist um die Sonne."	'umkreisen' 'kreisen-um'
"'Apfelsine' ist gleichbedeutend mit 'Orange'." "'Apfelsine' bedeutet dasselbe wie 'Orange'."	'gleichbedeutend-sein-mit' 'dasselbe-bedeuten-wie'

Prädikate

"Max informiert Mia über Mona." "Max informiert sich über Mona."	'informieren-über' 'sich-informieren-über'
"Max ähnelt Marx." "Max ähnelt Marx wie ein Ei dem anderen." "'Max' ist ähnlich zu/mit/wie 'Marx'".	'ähneln' 'ähneln-wie-ein-Ei-dem-and.' 'ähnlich-sein-zu/mit/wie'
"Max erinnert sich." "Max erinnert sich gerne an Mia." "Max erinnert gerne an Mia."	'sich-erinnern' 'sich-erinnern-an' 'erinnern-an'
"Max macht sich bereit für Mias Geburtstag am 1. Januar."	'sich-bereit-machen-für'
"Max überführt Moritz des Streichs an Witwe Bolte." "Max führt Mia über die Straße." "Die Route Mü.–Nü. führt über Regensburg."	'überführen' 'führen-über' 'führen-über'

Prädikate

"Max wurde von Mia gesehen."	'wurde-gesehen(-von)'
"Max hat(te) Mia gesehen."	'hat(te)-gesehen'
"Max hätte Mia sehen können."	'hätte-sehen-können'
"Max wird/würde Mia gesehen haben wollen."	'wird/würde-gesehen-haben-wollen'
"Max glaubt Mia gesehen zu haben."	'glaubt-gesehen-zu-haben'
"Max lässt Mia gehen."	'gehen-lassen'
"Max hätte Mia gehen lassen sollen."	'hätte-gehen-lassen-sollen'
"Max hämmert das Metall platt." "Max hat das Metall plattgehämmert."	'platthämmern' 'hat-plattgehämmert'
"Max geht bergsteigen." "Max will bergsteigen gehen."	'bergsteigen-gehen' 'bergsteigen-gehen-wollen'

Prädikate

Zum Prädikat gehören damit auch alle ergänzenden Elemente (außer Negationen) wie z. B.:

- *Pronomen*, die unverzichtbarer oder fester Bestandteil des Verbs sind ("*sich* freuen/erinnern", "*es* regnet");
- *Adpositionen*, die fester Bestandteil des Verbgefüges sind ("kreisen *um*", "informieren *über*", "erinnern *an*");
- *Verbpartikel*, die fester, aber abtrennbarer Bestandteil des Verbs sind und die Bedeutung des Verbs beeinflussen ("*um*kreisen", "*platt*hämmern");
- *(Hilfs-/Modal-)Verben* und die Infinitivmarkierung "zu", die Ergänzungen zum Verbkomplex sind ("*werden*"/"*haben*"/"*hätten*", "*wollen*"/"*können*", "*gewesen*"/"*gewollt*" usw.);

Prädikate

- *Adjektive/Partizipien/Adverben/Nomen*, die zusammen mit einem schwach bedeutungsvollen Verb wie "sein", "haben", "machen" u. a. ein komplexes Prädikat ergeben (idiomatisch oder nicht-idiomatisch):
  - *Adjektive*: "*gleichbedeutend* sein (mit)", "*platt* hämmern", "*gewillt/willens* sein (zu)";
  - *Partizipien*: "*unwissend* sein", "(sich) *bewusst* sein", "(sich) *bewusst* machen", "*gewusst* haben";
  - *Adverben*: "*bereit* sein (für)", "sich *bereit* machen (für)", "einen *drauf* machen";
  - *Nomen*: "(ein) *Mensch/Physiker* sein", "*Fortschritte* machen", "*(Gesichts-)Röte* haben".

Prädikate

- Schließlich werden Prädikate noch dahingehend untersucht, wie viele Argumente (Leerstellen) sie besitzen, was durch Pronomen angezeigt werden kann:

Anzahl Argumente	Beispielaussage	Prädikat
0	"Es regnet."	'regnen'
1	"Max schläft."	'*wer*$_1$ schläft'
2	"Max mag Mia."	'*wer*$_1$ mag *wen*$_2$'
3	"Max liest Mia (aus) 'Max und Moritz' vor.	'*wer*$_1$ liest-vor(-aus) *wem*$_2$ *was*$_3$'
4	"Max trägt Mia die Koffer zum Bahnhof."	*wer*$_1$ trägt *wem*$_2$ *was*$_3$ *wohin*$_4$'

Prädikate

- Grundsätzlich können Prädikate beliebig viele Leer-stellen/Argumente aufweisen, in natürlichen Sprachen kommen jedoch kaum mehr als drei oder vier vor;
- die Anzahl der möglichen Argumente eines Prädikats wird auch *Valenz* (Wertigkeit), *Stelligkeit* oder *Arität* genannt (von "einwertig"/"einstellig", "zweiwertig"/"zweistellig" usw. = engl. "un*ary*", "bin*ary*" etc.);
- nullstellige Prädikate wie "regnen" bilden die Ausnahme:
  - Im Dt. sind dies vor allem Wetterverben ("Es schneit." usw.);
  - sie können wie Aussagen der Aussagenlogik behandelt werden, die entweder als nicht zerlegbar hinsichtlich Prädikat und Subjekt/Objekt gelten oder als nur aus dem Prädikat selbst be-stehend betrachtet werden, das bereits die ganze Aussage ist.

Prädikate

- Hinweis: Das vermeintlich zweistellige Prädikat "sein" (z. B. "Max ist ein Mensch.", "Max ist müde.") ist tatsächlich *einstellig*, sofern es sich bei "sein" um eine so genannte Kopula (Verbinder-Wort) handelt:
  - "sein" ist *semantisch* integraler Bestandteil des Adjektivs oder Nomens, die als eigentliche Prädikatsbegriffe zu betrachten sind ('ein-Mensch-sein', 'müde-sein');
  - auch von Verben abgeleitete Partizipien oder deutsche Verlaufsformen sind als einstelliges Gesamtprädikat zu betrachten ('schlafend-sein', 'am-Schlafen-sein');
  - in einigen Fällen verhält sich "haben" analog zu "sein", wenn es *eine* semantische Einheit bildet ('eine Erkältung haben' = 'erkältet sein', 'Bedenken haben' = 'bedenkenvoll sein' usw.).

Übung — Diskussion

- Identifizieren Sie die Prädikate in folgenden Sätzen und ermitteln Sie deren Stelligkeiten:

Ausdruck	Prädikat(e)	Stelligkeit(en)
"Max hebt sich von den anderen ab."		
"Mia will Max mit Maja bekannt machen."		
"Max wird das Zeitliche segnen."		
"Max hat dem Moritz die Geschichte nicht abkaufen können."		
"Es ist Frühling.", "Es herbstlt."		
"Es wird gearbeitet."		
"Max und Mia betrinken sich."		

Argumente

- Die Argumente von Prädikaten im Sinne von logischen Subjekten und Objekten unterliegen einigen Beschränkungen:
  - Das Argument darf selbst kein Prädikat sein, d. h. in die Leerstelle darf nur ein Element eingesetzt werden, das selbst keine Leerstellen für Argumente besitzt:
    - Diese Beschränkung gilt für die Prädikatenlogik 1. Stufe (PL1), die hier betrachtet wird;
    - bspw. wäre ein Adverb, das ein Prädikat ist und sich selbst auf ein Prädikat wie z. B. ein Adjektiv oder Verb bezieht, ein Prädikat höherer Ordnung, das in der PL1 nicht verarbeitet werden kann (hierzu wäre eine Prädikatenlogik höherer Stufe nötig).

Argumente

Man betrachte hierzu den Unterschied zwischen folgenden beiden Sätzen:

- "Max ist langsam.":
  - "langsam" *als Adjektiv* bezieht sich direkt auf das Subjekt "Max", d. h. sagt zusammen mit der Kopula "sein" direkt eine Eigenschaft über Max aus ('das Langsamsein von Max');
  - dies kann in der PL1 genau so ausgedrückt werden (s. u.).
- "Max fährt langsam.":
  - "langsam" *als Adverb* bezieht sich hier nicht unmittelbar auf das Subjekt "Max", sondern auf das Prädikat "fahren" ('das Langsam-fahren'), das seinerseits indirekt eine Aussage über "Max" macht;
  - solche Aussagen über Prädikate können jedoch in der PL1 nicht formalisiert werden.

Argumente

- Stattdessen muss ein Subjekt oder Objekt aus prädikatenlogischer Sicht ein *Individualbegriff* sein, der ein *einziges* Ding oder Phänomen ('Entität') in der Welt identifiziert/referenziert:
  - Individualbegriffe können sprachlich auf zweierlei Weise ausgedrückt werden:
    - *Eigennamen*: Sie stehen direkt für den individuellen Träger des Namens (z. B. "Albert", "Einstein", "Albert Einstein", "Paris", "Lassie", "Pi", "VW", "Queen Elizabeth II" usw.);
    - *Kennzeichnung*: Sie bezeichnen ein Objekt durch eine eindeutige, eigennamen-ähnliche Beschreibung (z. B. "die Alpen", "der Mond der Erde", "der 11. September 2001", "der Eiffelturm", "die französische Riviera" usw.).

Argumente

Im Hinblick auf bestimmte sprachliche Ausdrücke als Argumente ist Folgendes zu beachten:

- *Pronomen*: Nur *gebundene* Pronomen, die sich auf ein *bestimmtes* Individuum beziehen, können als Argumente von Prädikaten eingesetzt werden:
  - möglich: "Max mag das Buch 'Der Name der Rose'. *Es* ist von Umberto Eco." ("es" = "Buch 'Der Name der Rose'");
  - nicht möglich: "*Es* regnet." ("es" ist bezugslos).
- *Einstellungsverben*: Verben wie "glauben", "meinen" usw., die als Ergänzung einen "dass"-Satz aufweisen, können hier nicht als Prädikate verwendet werden (z. B. "Max glaubt, *dass* Mia ihn mag." vs. "Max glaubt [an] Mia." ok).

Argumente

- Beispiele für Individuenausdrücke verschiedener Art:

Typ	Vertreter
Person, Gruppe	"Bundespräsident Gauck", "der Papst", "Homer Simpson", "die Familie Simpson", "die 68er(-Generation)", "die drei Tenöre"
Objekt, Tier, (Natur-) Phänomen	"Kommissar Rex", "die Donau", "die Zugspitze", "(die) Venus", "das Brandenburger Tor", "Excalibur", "Einsteinium", "$E = mc^2$", "Pi", "die Zahl 1", "das Wort 'Katze'", "das Papamobil", "Hair"
Institution, Organisation	"VW", "die Universität(sbibliothek) Regensburg", "der Deutsche Bundestag", "Greenpeace", "das Rote Kreuz"
System, Struktur	"die Alpen", "die Niagara-Fälle", "das Sternbild Schütze", "die deutsche Sprache", "Europa", "die Vereinigten Staaten"/"USA"
Ereignis, Ort	"Berlin", "das Jenseits", "der 2.2.2222", "WWII" ('World War II'), "die Bundestagswahl 2013", "der Urknall", "das Universum"

Argumente

Als Eigennamen bzw. Individuen können auch folgende Klassen von Entitäten betrachtet werden:

- Titel von Filmen/Serien, Büchern, Liedern/Alben, Musicals/Opern/Theaterstücken;
- Bezeichnungen für mathematische/physikalische/chemische Formeln, Zahlen, Konstanten (aber nicht biologische Arten wie "Homo sapiens"/"Mensch");
- Namen für meteorologische/astronomische Phänomene/Ereignisse wie Wirbelstürme, Hochs/Tiefs, Sterne/Planeten, Asteroiden/Kometen/Meteoriten;
- Bezeichnungen für Wissenschaften und wissenschaftliche Inhalte wie Aussagen-/Prädikatenlogik, Semantik.

Argumente

- Das wesentliche Kriterium zur Unterscheidung zwischen Argument und Prädikat liegt darin, welche Arten von Begriffen damit gemeint sind:
  - Prädikate sind *attribuierende* oder *relationierende Allgemeinbegriffe*, die einem oder mehreren Individuenbegriffen zugesprochen werden:
    - *Attribuierende Allgemeinbegriffe* sagen eine *Eigenschaft* über ein Individuum aus (einstelliges Prädikat);
    - *Relationierende Allgemeinbegriffe* sagen eine *Beziehung* zwischen zwei oder mehr Individuen aus, die Subjekt bzw. Objekt(e) sind (zwei- oder mehrstelliges Prädikat).

Argumente

Beispiele für Attribute und Relationen:

	semantische Funktion	Beispiele
Attribut	Klassifikation durch einen Gattungsnamen (Nomen)	"(ist ein) Mensch" ('Menschsein'), "(ist ein) Stein" ('Steinsein'), "(ist eine) Zahl" ('Zahlsein')
	Zuordnung einer Eigenschaft durch ein Adverb, Adjektiv oder Verb	"(ist) menschlich" ('menschlich sein'), "(ist) rot" ('rot sein', 'Röte haben'), "(ist) allein" ('allein sein', 'Alleinsein'), "(ist) vermögend" ('vermögend sein'), "(hat) Vermögen" ('Vermögen habend') "schlafen" ('schlafend/schläfrig sein', 'am Schlafen sein'), "sich freuen" ('sich freuend sein', 'sich am Freuen sein')

Argumente

	semantische Funktion	Beispiele
Relation	ungerichteter (symmetrischer) Bezug zwischen Subjekt und Objekt(en)	"ähneln"/"gleichen" ('sich ähnlich/gleich sein', 'ähnlich/gleich sein mit'); "Ähnlichk. zwischen"/"Ähnlichk. haben mit"; "verwandt/bekannt/benachbart sein mit".
	gerichteter (asymmetrischer) Bezug vom Subjekt zum Objekt bzw. den Objekten oder umgekehrt (d. h. Subjekt vs. Objekt als 'betroffene' Entitäten aus zwei Betrachtungsperspektiven)	"mögen" (Subjekt betreffend Objekt); "stolz sein auf" (Subjekt betreff. Objekt); "schenken" (Subjekt betreffend Objekte); "Vater/Sohn (sein) von" (Subj. betr. Obj.); "unter(halb) sein (von)" (Subj. betr. Obj.); "zwischen (sein)" (Subj. betr. Objekte); "erkennen" (Objekt betreffend Subjekt); "erhalten" (Objekt[e] betreffend Subjekt); "Empfänger (von)" (Objekt betr. Subjekt).

Argumente

- Argumente sind Individualbegriffe, die selbst nichts über einen anderen Individualbegriff oder gar einen Allgemeinbegriff aussagen können:
  - Individualbegriffe sind weder klassifizierend noch eigenschaftszuweisend:
    - Man kann nicht sinnvoll wörtlich aussagen: *"Max Müller ist ein Albert Einstein." oder *"Der/ein Mensch ist ein Albert Einstein." ("Max Müller ist ein Einstein." ist zwar möglich, aber "Einstein" ist dann ein vom Eigennamen abgeleiteter Allgemeinbegriff, der dasselbe bedeutet wie 'Genie');
    - Man kann jedoch sinnvoll sagen: "Albert Einstein war Physiker.", "Albert Einstein ist tot.", "Albert Einstein wirkt bis zum heutigen Tage nach." usw.

Argumente

- Ebensowenig stellen Individualbegriffe Relationen (Beziehungen, Verhältnisse) zwischen Subjekt und Objekt(en) her:
  - Man kann nicht sinnvoll sagen: *"Mia einsteint Max." ("Max *röntgt* den Patienten Mia." ist möglich, da "röntgen" hier ein vom Eigennamen "Röntgen" abgeleitetes Verb als Allgemeinbegriff ist, der eine Relation zwischen Subjekt und Objekt herstellt!);
  - Individualbegriffe verfügen grundsätzlich nicht über Argument-/Leerstellen, die durch entsprechende Ausdrücke gefüllt werden müssen, sondern sie sind selbst die Füller von Prädikaten-Leerstellen.

Argumente

Die Grenzen zwischen Individualbegriff und Allgemeinbegriff sind allerdings fließend:

- *Individualbegriff als Allgemeinbegriff*:
  - Individualbegriff "(der) Albert Einstein" vs. Allgemeinbegriff "(ein) Einstein" im Sinne von 'Genie' (z. B. "Max ist der neue Albert Einstein.");
  - Individualbegriff "(der) Konrad Röntgen" vs. Allgemeinbegriff "(das) Röntgen"/"röntgen" (vgl. auch Verben wie "riestern");
  - Individualbegriff "der/unser Mond" bzw. "die/unsere Sonne" vs. Allgemeinbegriff "ein Mond" / "eine Sonne".

Argumente

- *Allgemeinbegriff zu Individualbegriff*:
  - Allgemeinbegriff "(ein) Meier"/"(ein) Schuster" (Berufs-bezeichnungen) vs. Individualbegriff "der Meier"/"der Schuster" (eine bestimmte Person);
  - Allgemeinbegriff "die/einige Alpen" (Plural von "Alpe" im Sinne von 'Almen') vs. Individualbegriff "(die) Alpen" (*ein* Bergmassiv);
  - Allgemeinbegriff "(eine) Freiheitsstatue" (von vielen) vs. Individualbegriff "die Freiheitsstatue" (nur eine bestimmte);
  - Allgemeinbegriff "(irgendein) 11. September" vs. Individualbegriff "der 11. September (2001)".

Prädikate vs. Argumente

- Überblick Prädikate vs. Argumente:

Prädikat	Argument
• Allgemeinbegriff • Begriffswort/Begriff (Prädikator) • genereller Term/Ausdruck	• Individualbegriff • Eigenname/Kennzeichnung (Nominator) • singulärer Term/Ausdruck
Bezug auf 0, 1, 2, ..., N Gegen-stände/Situationen des Diskurs-universums ("Einhorn", "Papst", "Marsmond", "Erdbeben", "Zahl")	Bezug auf genau 1 Gegenstand/ Situation des Diskursuniversums ("A. Einstein", "Regensburg", "der Mond", "die Alpen", "der Urknall").
Stelligkeit/Arität: 0, 1, 2, ..., M (beliebig viele Argumente)	Stelligkeit/Arität: n. a. (0-stelliges Prädikat ≠ Argument!)

Übung — Diskussion

- Begründen Sie, warum folgende Begriffe ein oder kein Argument im Sinne der Prädikatenlogik sind:

Begriff	Begründung
"der/die Bundeskanzler/in der BRD" "das bayerische Landesparlament"	
"Venus" (von Milo) "Venus" (Planet) "Venus" (schöne Frau) "Venus" (Lied)	
"BMW" (Firma) "BMW" (Auto)	
"Englisch" (Sprache) "englisch" (Eigenschaft)	

Übung — Diskussion

"Frühling" "Frühling 2014"	
"Unglückszahl 13" "Unglückswurm"	
"Dom"/"Kathedrale" "Regensburger Dom"	
"Monat" "(Monat) Mai"	
"(das dt. Wort) 'Katze'"	
"Hansdampf" "Hanswurst" "Hänschen (klein)" "Hansel"	

Übung – Vertiefung

* Ermitteln Sie die syntaktischen und semantischen Argumente (Subjekt vs. Objekt[e]) folgender Aussagen:

Ausdruck	Argumente			
	syntaktisch		semantisch	
	Subj	Obj	Subj	Obj
"Es zieht".				
"Max langweilt sich."				
"Max ärgert Mia."				
"Den Max friert."				
"Den Max friert es."				

Übung — Vertiefung

"Es geht Max nur um Mia."				
"Max gibt gerne Geld für wohl-tätige Zwecke."				
"Es gibt jetzt kein Geld mehr für Max und Mia."				
"Hier kann nicht mehr geholfen werden."				
"Max bezichtigt Mia des Verrats an Moritz."				
"Max verlagert seinen Wohn-sitz von München nach Berlin."				

Formalisierung

- Bei der konkreten Formalisierung der Prädikat-Argument-Struktur eines Aussagesatzes ist zu beachten, dass nur die wahrheitswert-relevanten Satz-Bestandteile verwendet werden:
  - Wörter oder Satzteile/Teilsätze, die Einstellungen des Sprechers (zum Satz) ausdrücken, müssen ignoriert werden:
    - *Einstellungsverben*: "glauben/meinen, dass ..." usw. (z. B. "Max *glaubt*, dass Mia ihn gesehen hat.");
    - *Modalpartikeln*: "ja", "doch", "wohl", "aber" (z. B. "Max hat *ja aber doch wohl* Mia gesehen.").

Formalisierung

- Zeit- und Ortsangaben in Form von *Adverbialen* können nicht formalisiert werden:
  - Adverbiale bestimmen die temporalen oder lokationalen Umstände des Ausgesagten näher (z. B. "*Heute morgen* hat Max Mia *auf der Straße* gesehen.");
  - als Adverbiale beziehen sie sich auf das Verb des Aussage-satzes und machen damit prädikative Aussagen über ein Prädikat (was in PL1 nicht möglich ist).

  Möglich sind hingegen Zeit- und Ortsangaben in Form von *Argumenten* (z. B. "Max wohnt in *München*.").
- Deiktika müssen zuvor wieder durch absolute Angaben ersetzt werden (z. B. "ich" mit Sprecher, "hier" mit aktuellem Ort, "jetzt" mit aktueller Zeit).

Formalisierung

- Nachdem Prädikate und entsprechende Argumente in einem Aussagesatz identifiziert wurden, erfolgt die Formalisierung nach einem einfachen Schema:
  - Das Prädikat wird zuerst genannt, dann folgen die Argumente (Prädikat-Subjekt-Objekt-Stellung PSO):
    - Die Argumente werden nach dem Prädikat in runde Klammern eingefasst und darin durch Kommata getrennt, wobei immer zuerst das Subjekt, dann eventuelle Objekt(e) angegeben werden (Ersteres ist obligatorisch, Letztere sind optional);
    - Prädikate werden dabei mit einem großen Anfangsbuchstaben geschrieben, Argumente mit einem kleinen, z. B. P(a), Q(a,b), R(a,b,c) usw. ('a' ist das Subjekt, 'b' und 'c' sind Objekte).

Formalisierung

- Prädikate und Argumente werden oft mit dem/den Anfangsbuchstaben des entsprechenden Wortes bzw. der Wortgruppe aus dem Satz abgekürzt:
  - Dabei ist zu beachten, dass die Eindeutigkeit gewahrt bleibt (d. h. evtl. mit mehreren Buchstaben abkürzen);
  - zugrunde gelegt ist die jeweilige Zitier- oder Nennform eines Wortes, wie sie auch in einem Lexikon (z. B. Duden) verzeichnet ist (d. h. die *unflektierte* Form):
    - Nomen: Nominativ Singular (z. B. "Mia" statt "Mias");
    - Verben: Indikativ Präsens Infinitiv ("sehen" statt "sieht"/"sah").

  Es handelt sich hierbei um eine *semantische*, nicht um eine syntaktische Formalisierung!

Formalisierung

- Beispiele:

Stelligkeit	Beispiele (Prädikate kursiv)	Formalisierungen
0	"*Es regnet*."	R() oder nur R
1	"Max *badet*.", "Max *ist am Baden*." "Mia *ist blond*.", "die *blonde* Mia"	B(m) B(m)
2	"Regensburg *liegt an* der Donau." "Ralf *ist launischer als* Doris." "Max *mag* München."	L(r,d) L(r,d) Mö(ma,mü)
3	"Anton *verkauft* die 'Babywelt' *an* Chris." "*Verkauf* der 'Babywelt' *an* Chris *durch* Anton"	V(a,b,c) V(a,b,c)
4	"Anton *verlagert* sein Geschäft 'Babywelt' *von* Celle *nach* Düsseldorf."	V(a,b,c,d)

Formalisierung

Hinweise:

- Prädikate mit einer bestimmten Stellenzahl können durch ein Superskript P^0, P^1, P^2, …, P^K, …, P^N gekennzeichnet werden, wobei K die Stelligkeit angibt:
  - Dadurch wird die Anzahl der vom Prädikat geforderten Argumente angegeben (z. B. V^3 vs. V^4 im Beispiel oben);
  - dies ist vor allem dann nützlich, wenn über das Prädikat selbst ohne konkret angegebene Argumente gesprochen werden soll.
- Die Reihenfolge der Argumente darf nicht einfach verändert werden, da sonst ein anderes Prädikat mit anderer Bedeutung anzunehmen wäre (z. B. ist L(r,d) semantisch nicht dasselbe wie L(d,r)).

Formalisierung

- Die abkürzenden Schreibweisen ziehen meist auch verkürzte Sprechweisen nach sich:
  - P(a) spricht sich "P von a", Q(a,b) wird "Q von a, b" ausgedrückt, und R(a,b,c) entsprechend "R von a, b, c" usw. (generell ohne "und" für das Komma zwischen den Argumenten);
  - P(a) bedeutet, dass das Prädikat P auf das Argument a zutrifft oder bezüglich a der Fall ist (d. h. wahr ist); Q(a,b) bedeutet, dass die Relation Q zwischen a und b besteht bzw. der Fall ist; R(a,b,c) bedeutet entsprechend das Vorhandensein der Relation R zwischen a, b und c usw.

Formalisierung

- Zu beachten ist, dass Argumente in bestimmten Prädikaten auch mehrfach vorkommen können:
  - *Bei unecht* reflexiven Verben mit identischem Subjekt und Objekt werden beide Argumente explizit genannt:
    - "Max sieht sich (selbst) im Spiegel.": S(m,m);
    - "Max wäscht sich (selbst): W(m,m).

    "sehen" und "waschen" kann man auch noch andere.
  - Bei *echt* reflexiven Verben wird das Reflexivpronomen "sich" als unabtrennbarer Bestandteil des Verbs betrachtet:
    - "Max schämt sich.": S(m);
    - "Max wundert sich.": W(m).

    "schämen" und "wundern" kann man nur sich selbst.

Formalisierung

- Da den einzelnen Prädikaten ein Wahrheitswert zugesprochen werden kann, lassen sich diese auch wieder durch die bekannten Wahrheits-operatoren/-junktoren verknüpfen, wie sie auch in der Aussagenlogik verwendet werden:
  - Anstelle der Aussagenvariablen A, B usw. werden einfach entsprechende Prädikate mit ihren Argu-menten verwendet: z. B.
    - $P(a) \wedge Q(a,b) \wedge R(a,b,c)$;
    - $P(a) \rightarrow \{\neg Q(a,b) \vee R(a,b,c)\}$.

Formalisierung

- Hinweis: Der Operator '¬' und die Junktoren '∧', '∨', '⊕', '→' und '↔' werden nicht selbst als Prädikate ausgedrückt, wenn sie Wahrheitswerte verknüpfen:
  - Formalisierungen wie Und(P(a),Q(a,b)) oder Nicht(P(a)) sind damit fehlerhaft;
  - selbst wenn man das Prädikat 'Und' bspw. als zeitliches 'Und-dann' interpretieren würde, hätte man als Argument eines Prädikats ein oder mehrere andere Prädikate, was in PL1 nicht möglich ist;
  - andere Verknüpfungen können durch die logischen Junktionen und Operatoren wahrheitswerte-technisch nachgebildet werden:

Formalisierung

Verknüpfung	Beispiel	Formalisierung
"[zwar] aber": '∧'	"Zwar ist die Erde rund, aber sie ist keine Kugel."	$R(e) \wedge \neg K(e)$
"also"/"folglich": '→'/'⇒'	"Wenn es regnet, wird Max nass." "Es regnet, also wird Max nass."	$R() \rightarrow N(m)$ $R() \Rightarrow N(m)$
"außer"/"ohne": '∧'/'¬'	"Max besucht ohne Mia das Cinemaxx."	$B(max,cm) \wedge \neg B(mia,cm)$
"(zusammen) mit"	"Max besucht zusammen mit Mia das Cinemaxx."	$B(max,cm) \wedge B(mia,cm)$

Ferner dürfen nur Prädikate, nicht aber Argumente alleine verknüpft werden: "Max und Mia" ($max \wedge mia$) stellt keine wahrheitsfähige Aussage dar.

Formalisierung

- Allgemeine Beispiele für korrekte prädikatenlogische Formalisierungen:

Beispielaussage	Formalisierung
"Max joggt nicht."	$\neg J(m)$
"Max raucht und Mia trinkt."	$R(ma) \wedge T(mi)$
"Wenn Max raucht, dann trinkt Mia."	$R(ma) \rightarrow T(mi)$
"Immer genau/nur dann, wenn Max raucht, trinkt Mia."	$R(ma) \leftrightarrow T(mi)$ $\{R(ma) \rightarrow T(mi)\} \wedge \{\neg R(ma) \rightarrow \neg T(mi)\}$
"Weder Max noch Mia noch Moritz sind volljährig."	$\neg V(ma) \wedge \neg V(mi) \wedge \neg V(mo)$ $\neg\{V(ma) \vee V(mi) \vee V(mo)\}$
"Max ist zwar faul, aber nicht dumm."	$F(m) \wedge \neg D(m)$
"1 plus 1 ist gleich 2 minus 1."	$P(1,1) \leftrightarrow M(2,1)$ (f)

Formalisierung

"Berlin liegt in Deutschland und/oder in Amerika."	$L(b,d) \vee L(b,a)$
"Der faule, aber nicht dumme Max mag Mia, die fleißig und alles andere als blöd ist."	$Fa(ma) \wedge \neg Du(ma) \wedge Fl(mi) \wedge \neg Du(mi) \wedge Mö(ma,mi)$
"Max schenkt Mia [das Buch] 'Der Name der Rose' von Umberto Eco."	$Sch(ma,mi,dndr) \wedge Aut(ue,dndr)$ $[\wedge Bu(dndr)]$
"Max besitzt 'Der Name der Rose'." "'Der Name der Rose' gehört Max."	$B(m,dndr)$ (wer besitzt was?) $G(dndr,m)$ (was gehört wem?)
"Maxi ist ein Mann oder eine Frau."	$M(m) \oplus F(m)$ bzw. $M(m) \oplus \neg M(m)$ bzw. $\neg F(m) \oplus F(m)$
"Scheint die Sonne oder ist es Frühling, ist Max gutgelaunt."	$\{S(s) \vee F()\} \rightarrow G(m)$

Übung – Vertiefung

- Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik:

Aussage	Formalisierung
"Max lebt in München."	
"Mia rackert sich für Mathe ab."	
"Max schläft und Mia liest 'Sofies Welt'."	
"Der Max und der Moritz spielen Streiche mit Mia."	
"Max und Moritz sehen Mia und Maja."	
"Max ärgert sich über Moritz, wenn er Unsinn macht."	

Übung — Vertiefung

"Der kleine Max mag Mia, aber nicht Moritz und seine komische Freundin Maja."	
"Max der Manager mag Moritz, den Maler und Maurer, nicht, aber umgekehrt."	
"Max kämmt sich."	
"Max kämmt Max."	
"Max kämmt Mia."	
"Max grämt sich."	
"Max, Mia, Maja und Moritz sind Geschwister."	

Quantifikation

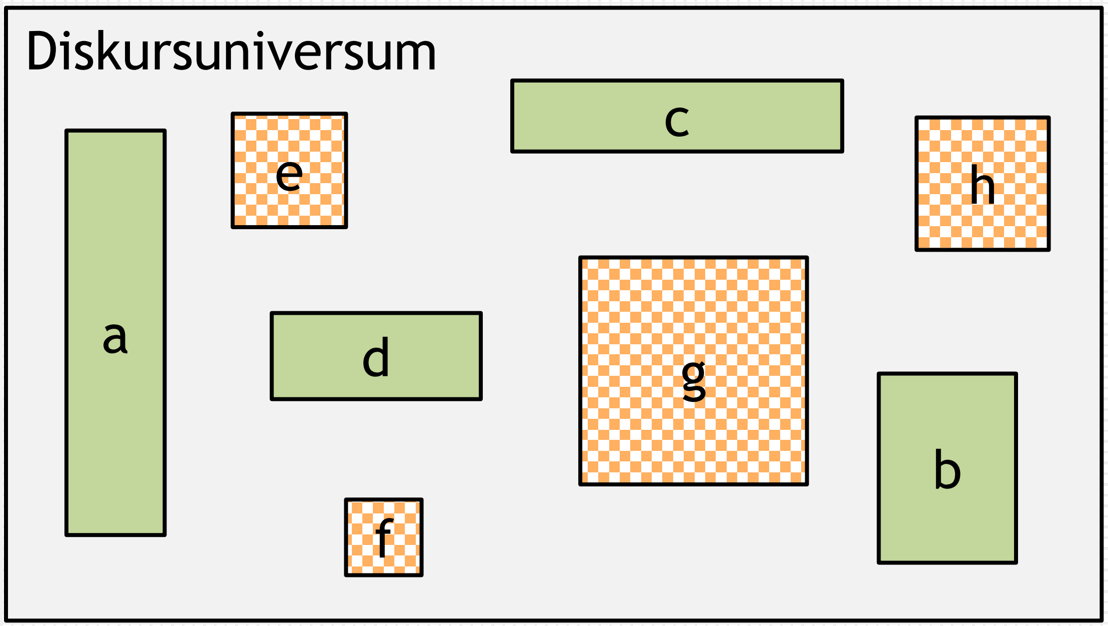
- Die bisherigen prädikatenlogischen Mittel erlauben es nur, Prädikationen (Aussagen) über bestimmte einzelne Objekte zu machen:
  - Durch Argumente (Subjekte/Objekte) können alle Individualbegriffe a, b, c usw. erfasst werden, die sprachlich durch Eigennamen und Kennzeichnungen ausgedrückt werden (z. B. "Gustave Eiffel", "der Eiffelturm" usw.);
  - durch Prädikate können alle Allgemeinbegriffe P(...), Q(...), R(...) usw. erfasst werden, die mindestens eine Leerstelle (Argument) oder mehr aufweisen, die mit Individualbegriffen aufgefüllt werden müssen.

Quantifikation

- Um nun aber auch Aussagen über mehrere oder alle Individuen zugleich machen zu können, bietet die Prädikatenlogik grundlegend neue Möglichkeiten:
  - Gegenüber der Aussagenlogik werden so genannte *Quantoren* (Quantifizierer, Quantifikatoren) als neues Formalisierungsinstrument eingeführt, durch die alltagssprachliche Mengen oder Quantitäten wie "alle", "einige" oder "kein" ausgedrückt werden können;
  - durch prädikatenlogische Aussagen mit Quantoren lassen sich Prädikationen auf mehrere Individuen gleichzeitig anwenden, ohne diese alle einzeln anführen zu müssen (von Vorteil vor allem beim logischen Schließen).

Quantifikation

- Zugrunde gelegt ist hierbei ein so genanntes *Diskurs-universum*, in dem alle individuellen Objekte (Entitäten) existieren, über die eine Aussage gemacht werden kann:



"Alle Individuen sind Rechtecke." (grün + orange/kariert)

"Einige Individuen sind Quadrate." (nur orange/kariert)

Quantifikation

- Ferner ließen sich durch Negation weitere Aussagen machen:
  - "Nicht alle Individuen sind Quadrate." (da auch einige Nicht-Quadrate dabei sind);
  - "Nicht alle Individuen sind Nicht-Quadrate." (da eben auch einige Quadrate dabei sind);
  - "Alle Individuen sind nicht Nicht-Rechtecke." (da ja alle Rechtecke sind);
  - "Kein Individuum ist ein Kreis/Dreieck/Fünfeck/usw.".
- Ebenso ließen sich Aussagen bezüglich der Farben etc. machen (z. B. "Alle Quadrate sind orange.").

Quantifikation

- Durch zwei verschiedene Quantoren lassen sich nun Aussagen über bestimmte Mengen von Individuen machen:
  - *Allquantor*: Durch ihn kann ein Prädikat auf *alle* Individuen des Diskursuniversums bezogen werden:
    - Der Allquantor ermöglicht eine *universelle* Aussage (z. B. "Alle Menschen sind sterblich." bezüglich unseres Universums);
    - dadurch wird behauptet, dass *sämtliche Individuen* die angegebene Eigenschaft im vorausgesetzten Diskurs-universum besitzen.

Quantifikation

- *Existenzquantor*:
  - Der Existenzquantor ermöglicht, dass Aussagen eines Prädikats auf ein oder mehrere (einige) Individuen bezogen werden (z. B. "Einige Menschen sind hundert-jährig." bezüglich unseres Universums);
  - dadurch wird behauptet, dass es *überhaupt mindestens ein* Individuum mit der angegebenen Eigenschaft im vorausgesetzten Diskursuniversum gibt.

Im Folgenden seien alle Aussagen auf unser reales (Diskurs-)Universum bezogen, außer es ist anders angegeben.

Quantifikation — Allquantor

- Der Allquantor soll eine *universelle (All-)Aussage* über *alle* Individuen des Diskursuniversums zugleich machen, d. h. ein Prädikat soll auf *jedes einzelne* Element a_1, a_2, a_3 (oder a, b, c) usw. zutreffen:
  - Bei N Individuen im Diskursuniversum müsste man also schreiben: $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_N)$;
  - da man die Anzahl N meist nicht kennt, verwendet man hierfür die Kurzschreibweise $\forall x\ P(x)$ (oder $\bigwedge x\ P(x)$):
    - $\forall$ ($\bigwedge$) ist der *Allquantor* und steht für 'Alle' (umgedrehtes 'A');
    - x ist eine *Individuenvariable* und vertritt alle Individuen des Diskurs-universums a_1, a_2, a_3 usw. (oder a, b, c etc.), wovon auf alle das Prädikat P zutrifft.

Quantifikation — Allquantor

Sprechweisen für nicht-negierten Quantor ∀:

Ausdruck	alternative Redeweisen	
$\forall x\, P(x)$	"*alle* x sind P" "für *alle* x gilt P" "für *alle* x gilt P(x)" "auf *alle* x trifft P zu" "über *alle* x wird P ausgesagt"	
'alle'	*Deutsch*: "sämtliche", "jeder"/"jede"/ "jedes", "jedweder"/"jedwede"/"jedwedes", "jeglicher"/"jegliche"/"jegliches"	*Englisch*: "each", "every (-body/-one)"

Quantifikation — Allquantor

Sprechweisen für negierten Quantor ¬∀:

<table>
<tr><th>Ausdruck</th><th colspan="2">alternative Redeweisen</th></tr>
<tr><td>¬∀x P(x)</td><td colspan="2">"nicht alle x sind P"
"nicht für alle x gilt P"
"nicht für alle x gilt P(x)"
"nicht auf alle x trifft P zu"
"nicht über alle x wird P ausgesagt"</td></tr>
<tr><td>'nicht alle'</td><td>Deutsch:
"für alle x gilt P/P(x) nicht", "auf alle x trifft P nicht zu", "über alle x wird P nicht ausgesagt"</td><td>Englisch:
"not every x is P", "not all x are P"</td></tr>
</table>

Quantifikation — Existenzquantor

- Der Existenzquantor soll eine *partikuläre (Existenz-) Aussage* über *ein* Individuum bzw. *einige* Individuen des Diskursuniversums machen, d. h. ein Prädikat soll auf nur ein oder auch mehrere beliebige Elemente a_1, a_2, a_3 (bzw. a, b, c) usw. zutreffen:
  - Bei N Individuen im Diskursuniversum müsste man also schreiben: $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_N)$;
  - da man die Anzahl N wiederum nicht kennt, verwendet man hierfür die Kurzschreibweise $\exists x\ P(x)$ (oder $\bigvee x\ P(x)$):
    - $\exists$ ($\bigvee$) ist der *Existenzquantor* und steht für 'Einige' (umgedrehtes E);
    - x ist eine *Individuenvariable* und vertritt mindestens ein bzw. einige Individuen des Diskursuniversums a_1, a_2, a_3 usw. (oder a, b, c etc.), wovon auf einige das Prädikat P zutrifft und auf andere nicht.

Quantifikation — Existenzquantor

Sprechweisen für nicht-negierten Quantor ∃:

<table>
<tr><th>Ausdruck</th><th colspan="2">alternative Redeweisen</th></tr>
<tr><td>∃x P(x)</td><td colspan="2">"einige x sind P"
"für einige x gilt P"
"für einige x gilt P(x)"
"auf einige x trifft P zu"
"über einige x wird P ausgesagt"</td></tr>
<tr><td>'einige'
('wenigs-
tens ein')</td><td>Deutsch:
"etliche", "manche", "mehrere",
"einzelne", "es gibt/existiert
(wenigstens) ein Ding (etwas)"</td><td>Englisch:
"some", "there is",
"(at least) one"</td></tr>
</table>

Quantifikation — Existenzquantor

Sprechweisen für negierten Quantor $\neg\exists$:

<table>
<tr><th>Ausdruck</th><th colspan="2">alternative Redeweisen</th></tr>
<tr><td>$\neg\exists x\ P(x)$</td><td colspan="2">"kein x ist P"
"für kein x gilt P"
"für kein x gilt P(x)"
"auf kein x trifft P zu"
"über kein x wird P ausgesagt"</td></tr>
<tr><td>'kein' ('nicht wenigs-tens ein')</td><td>Deutsch:
"nichts ist P" ("kein x ist P"), "es gibt/existiert kein Ding (nichts), das P ist", "es ist nicht der Fall, dass es etwas gibt, das P ist"</td><td>Englisch:
"nothing is P", "no x is P", "there is no x that is P"</td></tr>
</table>

Quantifikation

- Übersicht Existenzquantor vs. Allquantor:

Existenzquantor	**Allquantor**
Damit die Existenzaussage ∃x P(x) insgesamt wahr wird, muss nur *mindestens eine* (oder auch *mehrere/alle*) der Einzelaussagen P(a_i) *wahr* sein.	Damit die Allaussage ∀x P(x) insgesamt wahr wird, müssen tatsächlich *alle* Einzelaussagen P(a_i) *ohne Ausnahme zugleich wahr* sein.
∃x P(x) ist eine *partikuläre* Aussage, die auf *einzelne* Individuen des Diskursuniversums zutrifft.	∀x P(x) ist eine *universelle* Aussage, die auf *alle* Individuen des Diskursuniversums zutrifft.
∃x P(x) macht eine semantisch *eher schwache* Aussage.	∀x P(x) macht eine semantisch *sehr starke* Aussage.

Quantifikation

- *Individuenvariablen* x, y, z (oder x_1, x_2, x_3, …) stehen *Individuenkonstanten* a, b, c (oder a_1, a_2, a_3, …) gegenüber:
  - *Individuenkonstanten* sind abkürzende Bezeichnungen, die sich innerhalb einer prädikatenlogischen Formel immer (konstant) auf dasselbe Individuum des Diskurs-universums beziehen (z. B. a für Anton oder die Alpen, m für Max/Mia oder die Mathematik) usw.;
  - *Individuenvariablen* sind Bezeichnungen, die sich (zugleich oder sukzessive) auf mehrere *verschiedene* (einige/alle) Individuen des Diskursuniversums beziehen.

Quantifikation

- Das 'x' im Quantor ∃x oder ∀x bezieht sich normalerweise auf jedes Auftreten von 'x' in einer Gesamtaussage wie $\forall x\ P(x) \land Q(x) \land R(x)$:
  - *Wirkungsbereich* (*Skopus*):
    - *Weiter Skopus*: Der Wirkungsbereich von ∀x oder ∃x ist die gesamte Formel, d. h. alle drei Prädikationen P(x), Q(x) und R(x): $\forall x\ [P(x) \land Q(x) \land R(x)]$.
    - *Enger Skopus*: Der Wirkungsbereich ist auf *einen* Quantor und dessen Prädikat beschränkt: $[\forall x\ P(x)] \land [\forall x\ Q(x)] \land [\forall x\ R(x)]$. (Die Gesamtaussage ist identisch mit oben – P, Q und R werden über alle Individuen des Diskursuniversums ausgesagt –, jedoch wird dies mit *drei unterschiedlichen* Variablen x ausgedrückt.)

Quantifikation

- *Bindung des Quantors:*
  - Wird durch ∀x oder ∃x eine Individuenvariable benutzt, so werden alle x in den Prädikationen P(x), Q(x), R(x) usw. durch/an den Quantor *gebunden*;
  - dabei sind zwei Grenzfälle zu beachten:
    - Der Quantor ∀x oder ∃x wird eingeführt, ohne dass x in den Prädikationen selbst überhaupt vorkommt: z. B. wird in ∃x P(m) offenbar nur eine Aussage P über ein Individuum m gemacht (Individuenkonstante), so dass der Quantor ∃x überflüssig ist;
    - eine Variable x wird genutzt, ohne dass es dazu einen passenden Quantor gäbe (d. h. die Variable ist *ungebunden*), z. B. P(x):
      - x ist dann entweder eine Individuenkonstante (x für "Xaver"),
      - oder x bleibt ungebunden, was unüblich ist.

Quantifikation

- Dabei gelten im Hinblick auf den Wirkungsbereich und die Bindung eines Quantors folgende Äquivalenzen:

Bedingungen	Gleichheiten
Prädikat P(x) und Aussage Q, in der x nicht vorkommt	$\exists x\, [P(x)] \wedge Q = \exists x\, [P(x) \wedge Q]$ (Konjunktion)
	$\exists x\, [P(x)] \vee Q = \exists x\, [P(x) \vee Q]$ (Disjunktion)
	$\forall x\, [P(x)] \wedge Q = \forall x\, [P(x) \wedge Q]$ (Konjunktion)
	$\forall x\, [P(x)] \vee Q = \forall x\, [P(x) \vee Q]$ (Disjunktion)

Quantifikation

<table>
<tr><th>Bedingungen</th><th>Gleichheiten</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Prädikate P(x) und Q(x), die beide über x ausgesagt werden</td><td>$\exists x\, [P(x) \lor Q(x)] = \exists x\, [P(x)] \lor \exists x\, [Q(x)]$

(nur Disjunktion, nicht Konjunktion!)</td><td>"Es gibt Dinge, die Raben oder schwarz sind." = "Es gibt Dinge, die Raben sind, und/oder es gibt Dinge, die schwarz sind." (P = 'Rabe', Q = 'schwarz')</td></tr>
<tr><td>$\forall x\, [P(x) \land Q(x)] = \forall x\, [P(x)] \land \forall x\, [Q(x)]$

(nur Konjunktion, nicht Disjunktion!)</td><td>"Jedes Ding entsteht und vergeht." = "Jedes Ding entsteht und jedes Ding vergeht." (P = 'entstehen', Q = 'vergehen').</td></tr>
</table>

Quantifikation

Anmerkungen:

- Jeder Quantor benutzt seine *eigene* Individuenvariable (hier x), unabhängig von dessen tatsächlichem Wirkungsbereich:
  - *Zwei verschiedene Aussagen*: In $\exists x\ [P(x)] \vee \exists x\ [Q(x)]$ und $\forall x\ [P(x)] \wedge \forall x\ [Q(x)]$ gibt es jeweils *zwei unterschiedliche* x, die nicht identisch sind (enger Skopus);
  - *eine Doppelaussage*: In $\exists x\ [P(x) \vee Q(x)]$ und $\forall x\ [P(x) \wedge Q(x)]$ gibt es hingegen jeweils tatsächlich nur *ein einziges* x (weiter Skopus).
- Alltagssprachlich führt Letzteres zu einer Art 'Ausklammern', was in einer kürzeren Satzkonstruktion resultiert:
  - "*Einiges* ist ein Rabe oder schwarz." = "*Einiges*$_1$ ist ein Rabe und *einiges*$_2$ andere ist schwarz." (zufällig könnte auch beides zutreffen!);
  - "*Alles* entsteht und vergeht." = "*Alles*$_1$ entsteht und *alles*$_2$ vergeht.".

Quantifikation

- Beispiele für einfache Existenzaussagen:

	Formalisierung	Interpretation
Existenzaussagen	$\exists x\ [R(x) \wedge S(x)]$	"Für einige (Dinge) x gilt: x ist ein Rabe und zugleich ist x schwarz." "Einige Dinge sind Raben und zugleich schwarz." "Einige Raben sind schwarz."
	$\exists x\ [R(x) \wedge \neg S(x)]$	"Für einige (Dinge) x gilt: x ist ein Rabe und (aber) x ist zugleich nicht schwarz." "Einige Dinge sind Raben und zugleich nicht schwarz." "Einige Raben sind nicht schwarz."

Quantifikation

Erläuterungen:

- Die Aussage $\exists x\ [R(x) \wedge S(x)]$ bedeutet letztlich nur, dass die Schnittmenge der schwarzen und rabenhaften Dinge nicht leer ist, da es mindestens ein Ding x gibt, auf das beide Prädikate zutreffen (genauso gut kann es aber auch mehrere Dinge x geben, auf die beide Prädikate zutreffen);
- die teilweise verneinte Aussage $\exists x\ [R(x) \wedge \neg S(x)]$ behauptet zwar, dass es einige Raben gibt, sagt aber zugleich aus, dass diese nicht schwarz sind; d. h. es gibt auch einige nicht-schwarze Raben (z. B. weiße Albinoraben).

Quantifikation

- Beispiele für einfache Allaussagen:

	Formalisierung	Interpretation
Allaussagen	$\forall x\ [R(x) \rightarrow S(x)]$	"Für alle (Dinge) x gilt: Wenn x ein Rabe ist, dann ist er schwarz." "Alle Dinge, die Raben sind, sind schwarz." "Alle Raben sind schwarz."
	$\forall x\ [R(x) \rightarrow \neg S(x)]$	"Für alle (Dinge) x gilt: Wenn x ein Rabe ist, dann ist er nicht schwarz." "Alle Dinge, die Raben sind, sind nicht schwarz." "Alle Raben sind nicht schwarz." "Kein Rabe ist schwarz."

Quantifikation

Erläuterungen:

- Im Gegensatz zu den entsprechenden Existenzaussagen ist hier keine Konjunktion, sondern eine Subjunktion zur Verbindung der beiden Prädikationen R(x) und S(x) notwendig:
  - $\forall x\ [R(x) \land S(x)]$ würde fälschlicherweise besagen, dass jedes x ein Rabe und zugleich schwarz ist, d. h. jedes Element x des Diskursuniversums wäre ein schwarzer Rabe;
  - das ist aber nicht die gewünschte Aussage '(nur) alles, *was ein Rabe ist*, ist schwarz', d. h. *wenn* es sich bei x um einen Raben handelt (unter der Voraussetzung, dass x ein Rabe ist), dann ist er auch schwarz;
  - man greift also erst alle Raben aus dem Diskursuniversum heraus und macht dann eine Aussage nur über diese herausgegriffenen Elemente.

Quantifikation

- Ebenso falsch wäre auch die stärkere Formalisierung $\forall x\ [R(x) \leftrightarrow S(x)] = \forall x\ [R(x) \rightarrow S(x)] \wedge [S(x) \rightarrow R(x)]$:
  - Dies würde zwar bedeuten, dass alles, was ein Rabe ist, auch schwarz ist (soweit korrekt bezüglich dessen, was man aussagen will);
  - zudem würde aber auch die Aussage getroffen, dass alles, was schwarz ist, ein Rabe ist (was jedoch der eigentlich intendierten Aussage widerspricht);
  - faktisch würde man damit Raben und Schwärze gleichsetzen, d. h. "Rabe" und "schwarz"/"Schwärze" wären letztlich Synonyme.

Quantifikation

- Die teilweise verneinte Aussage $\forall x\ [R(x) \rightarrow \neg S(x)]$ macht eine ebenso starke Aussage wie das nicht-verneinte Gegenstück:
  - Sowohl "alle" als auch "kein" behaupten, dass eine Aussage auf die Gesamtheit der Objekte des Diskursuniversums anzuwenden ist;
  - die eine Aussage ist dabei negiert, die andere nicht:
    - Bei "alle" trifft eine Eigenschaft auf alle gemeinten Dinge zu (z. B. das Schwarzsein unter der Voraussetzung des Rabeseins);
    - bei "kein" trifft es auf kein einziges Ding zu, d. h. es trifft auf *alle nicht* zu (z. B. das Nicht-Schwarzsein unter der Voraussetzung des Rabeseins).

Quantifikation

- Äquivalenzen zwischen Existenz- und Allaussagen mit einem Prädikat P bzw. zwei Prädikaten R und S:

Prädikate	Gleichheit	Interpretation
P(x)	$\exists x\, P(x) \Leftrightarrow$ $\neg\forall x\, \neg P(x)$	"Einige Dinge x sind P(ink)." = "Nicht alle Dinge x sind nicht P(ink)."
	$\exists x\, \neg P(x) \Leftrightarrow$ $\neg\forall x\, P(x)$	"Einige Dinge x sind nicht P(ink)." = "Nicht alle Dinge x sind P(ink)."
	$\neg\exists x\, P(x) \Leftrightarrow$ $\forall x\, \neg P(x)$	"Kein Ding x ist P(ink)." = "Alle Dinge x sind nicht P(ink)."
	$\neg\exists x\, \neg P(x) \Leftrightarrow$ $\forall x\, P(x)$	"Kein Ding x ist nicht P(ink)." "Alle Dinge sind P(ink)."

Quantifikation

R(x), S(x)	$\exists x\ [R(x) \wedge S(x)] \Leftrightarrow \neg\forall x\ [R(x) \rightarrow \neg S(x)]$	"Einige R(aben) sind S(chwarz)." = "Nicht alle R(aben) sind nicht S(chwarz)." ('es gibt x, die R und zugleich S sind')
	$\exists x\ [R(x) \wedge \neg S(x)] \Leftrightarrow \neg\forall x\ [R(x) \rightarrow S(x)]$	"Einige R(aben) sind nicht S(chwarz)." = "Nicht alle R(aben) sind S(chwarz)." ('es gibt x, die R und/aber nicht S sind')
	$\neg\exists x\ [R(x) \wedge S(x)] \Leftrightarrow \forall x\ [R(x) \rightarrow \neg S(x)]$	"Kein R(abe) ist S(chwarz)." = "Alle R(aben) sind nicht S(chwarz)." ('es gibt nichts, das R und S ist')
	$\neg\exists x\ [R(x) \wedge \neg S(x)] \Leftrightarrow \forall x\ [R(x) \rightarrow S(x)]$	"Kein R(abe) ist nicht S(chwarz)." = "Alle R(aben) sind S(chwarz)." ('es gibt nichts, das R und/aber nicht S ist')

Quantifikation

Hinweise:

- Es geht hier nicht um die semantische Gleichheit bezüglich der Anzahl Elemente in den Mengen 'einige' vs. 'nicht alle', sondern um die logisch-wahrheitstechnische Gleichheit:
  - Die beiden Mengen 'einige' und 'nicht alle' können unterschiedlich viele Elemente haben, z. B. mögen 'einige' nur ein paar sein, 'nicht alle' ziemlich viele, auf die ein Prädikat zutrifft;
  - wahrheitstechnisch ist die genaue Anzahl der Elemente jedoch nicht relevant: 'einige' heißt nur, dass es überhaupt Elemente gibt, auf die ein Prädikat zutrifft, wie viele es auch immer sein mögen (es kann *eines* sein, *mehrere/viele* oder *alle*!).

Man beachte wieder den Unterschied zwischen der Alltagssprache und der dahinterstehenden logischen Formalisierung.

Quantifikation

- Die Tatsache, dass der Existenzquantor durch den Allquantor und die Negation (bzw. umgekehrt) ausgedrückt werden kann, macht einen der beiden Quantoren aus logischer Sicht prinzipiell überflüssig:
  - Zur einfacheren Formulierung/Formalisierung logischer Schlüsse sind zwei Quantoren jedoch besser geeignet (s. unten);
  - auch die Negation und Implikation von Aussagen mit All- oder Existenzquantor können durch zwei verschiedene Quantoren besser ausgedrückt werden (s. logisches Quadrat unten).

Quantifikation

- Bei der (nicht-äquivalenten) Negation von Aussagen mit Quantoren lassen sich mehrere Formen unterscheiden:

kontradiktorische Negation (Kontradiktion)	**konträre Negation (Kontrarietät)**	**subkonträre Negation (Subkontrarietät)**
zwei Aussagen können nicht zugleich wahr oder falsch sein	zwei Aussagen können zugleich falsch, aber nicht beide wahr sein	zwei Aussagen können zugleich wahr, aber nicht beide falsch sein
die Falschheit der einen Aussage bedingt die Wahrheit der anderen und umgekehrt	die Falschheit der einen Aussage bedingt *nicht* zwingend die Wahrheit der anderen	die Wahrheit der einen Aussage bedingt *nicht* zwingend die Falschheit der anderen
Beispiel: "tot" vs. "lebendig"	Beispiel: "Niederlage" vs. "Sieg" (vs. "Remis")	Beispiel: "Minderjähriger" vs. "Perso-Besitzer"

Quantifikation

- Kontradiktorische Negation:
  - *Allquantor*:
    - $\forall x\ P(x)$ ist kontradiktorisch zu $\neg\forall x\ P(x)$: P trifft auf alle Dinge x zu vs. P trifft nicht auf alle Dinge x zu;
    - die Negation $\neg\forall x\ P(x)$ behauptet jedoch nicht, dass P(x) auf gar kein Ding x zutrifft, sondern nur, dass P nicht alle x betrifft, d. h. auf einige kann P sehr wohl noch zutreffen;
    - Beispiel: "Alles ist pink/perfekt." vs. "Nicht alles ist pink/perfekt." (einige Dinge können trotzdem noch pink oder perfekt sein).

Quantifikation

- *Existenzquantor*:
  - $\exists x\, P(x)$ ist kontradiktorisch zu $\neg \exists x\, P(x)$: P trifft auf einige Dinge (bzw. mindestens ein Ding) x zu vs. P trifft nicht auf mindestens ein Ding x zu;
  - die Negation $\neg \exists x\, P(x)$ behauptet nicht, dass P nun auf mehrere oder gar alle Dinge zutrifft, sondern im Gegenteil, dass P(x) auf kein einziges Ding x mehr zutrifft (Verneinung der Existenz von x, die P sind!);
  - Beispiel: "Einige Dinge sind pink/perfekt." ("Es gibt überhaupt Dinge, die pink/perfekt sind.") vs. "Es ist nicht der Fall, dass mindestens ein Ding pink/perfekt ist." ("Kein einziges Ding ist pink/perfekt.").

Quantifikation

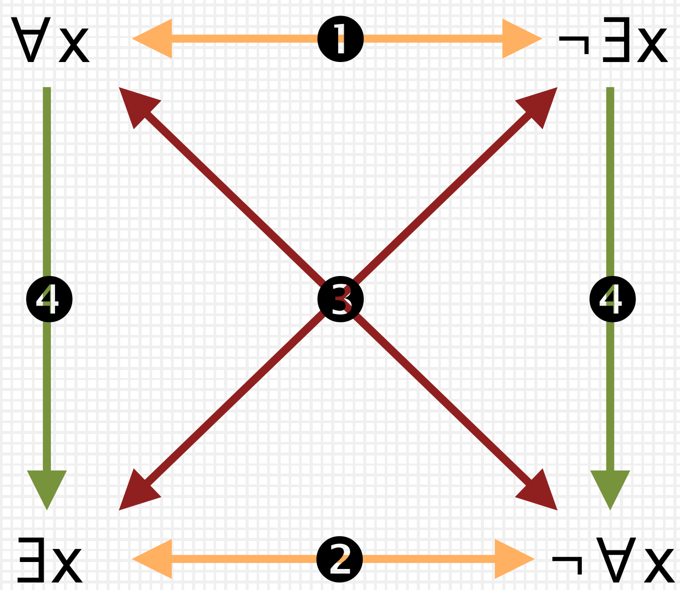
- (Sub-)Konträre Negation:
  - Kontrarietät:
    - $\forall x\ P(x)$ ist konträr zu $\neg\exists x\ P(x)$: P trifft auf alle Dinge x zu vs. P trifft auf kein einziges Ding x zu;
    - die Negation $\neg\exists x\ P(x)$ macht eine ebenso starke Aussage wie die nicht-negierte Aussage $\forall x\ P(x)$: Im letzteren Fall trifft P auf alle x zu, im ersteren auf alle nicht (alles/jedes vs. nichts/kein);
    - Beispiel: "Alles ist pink/perfekt." vs. "Es gibt nichts, was pink/perfekt ist." ('für alle Dinge gilt, dass sie nicht pink/perfekt sind').

Quantifikation

- Subkontrarietät:
  - $\exists x\, P(x)$ ist subkonträr zu $\neg \forall x\, P(x)$: P trifft auf einige Dinge (bzw. mindestens ein Ding) x zu vs. P trifft nicht auf alle Dinge x zu;
  - die Negation $\neg \forall x\, P(x)$ macht eine ebenso schwache Aussage wie die nicht-negierte Aussage $\exists x\, P(x)$: Im letzteren Fall trifft P auf einige x zu, im ersteren Fall trifft P nicht auf alle (also auch nur auf einige) x zu (P trifft damit weder auf gar kein noch auf alle x zu);
  - Beispiel: "Einige Dinge sind pink/perfekt." ("Es gibt überhaupt Dinge, die pink/perfekt sind.") vs. "Nicht alle Dinge sind pink/perfekt." ("Einige Dinge sind nicht pink/perfekt.").

Quantifikation

Im so genannten *logischen Quadrat* sind die Verhältnisse nochmals zusammengefasst, wobei weitere nicht-negierende Implikationsrelationen deutlich werden:



❶ Kontrarietät
❷ Subkontrarietät
❸ Kontradiktion
❹ Implikation

Quantifikation

Zwei Implikationen sind relevant:

- Positive Implikation:
  - $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x)$: Aus "Alles ist P." folgt "Einiges ist P." (bzw. "Es gibt überhaupt etwas, das P ist.");
  - identisch: $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_N) \Rightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_N)$ ($\vee$ bedeutet ja '*und*/oder'!).
- Negative Implikation:
  - $\neg\exists x\, P(x) \Rightarrow \neg\forall x\, P(x)$: Aus "Nichts ist P." folgt "Nicht alles ist P." ($\neg\forall x\, P(x) = \exists x\, \neg P(x)$: d. h. es gibt etwas, das nicht P ist);
  - identisch: $\neg[P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_N)] = \neg P(a_1) \wedge \neg P(a_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(a_N) \Rightarrow \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \ldots \vee \neg P(a_N) = \neg[P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_N)]$.

Das Konjungierte impliziert immer das Disjungierte: Die aussagekräftigere Konjunktion links des $\Rightarrow$ impliziert die schwächere Disjunktion rechts des $\Rightarrow$.

Quantifikation

- Neben Aussagen mit einem einzigen Quantor lassen sich auch Aussagen mit zwei oder mehr gleichen oder verschiedenen Quantoren bilden:
  - Für zwei Quantoren benötigt man entsprechend auch zwei verschiedene Individuenvariablen (Beispiele):
    - $\exists x\ \exists y\ M(x,y)$: "Es gibt ein(ige) x und y, wobei x y mag." ("Mindestens einer mag mindestens einen [anderen].");
    - $\exists x\ \forall y\ M(x,y)$: "Es gibt ein(ige) x, wobei x alle y mag." ("Mindestens einer mag alle.");
    - $\forall x\ \exists y\ M(x,y)$: "Alle x mögen ein(ige) y." ("Alle mögen mindestens einen.");
    - $\forall x\ \forall y\ M(x,y)$: "Alle x mögen alle y." ("Jeder mag jeden.").

Quantifikation

- Würde man jeweils nur eine Variable x für die zwei Quantoren verwenden, würden unsinnige/falsche oder andere Aussagen entstehen:
  - $\exists x\ \exists x\ M(x,x)$: "Einige mögen sich selbst." ($\exists x$ redundant);
  - $\exists x\ \forall x\ M(x,x)$: *"Einige mögen sich alle." (unsinnig/falsch);
  - $\forall x\ \exists x\ M(x,x)$: *"Alle mögen sich einige." (unsinnig/falsch);
  - $\forall x\ \forall x\ M(x,x)$: "Jeder mag sich selbst." ($\forall x$ redundant).
- Es gelten folgende gleichwertige Formalisierungen für *gleichartige* Quantoren (vertauschte Variablen bei den Quantoren):
  - $\forall x\ \forall y\ R(x,y) = \forall y\ \forall x\ R(x,y)$;
  - $\exists x\ \exists y\ R(x,y) = \exists y\ \exists x\ R(x,y)$.

Quantifikation

- Werden zwei oder mehr Quantoren zugleich benötigt, so kann auch eine alternative Darstellung gewählt werden:
  - Üblicherweise werden sämtliche Quantoren am Anfang der Formalisierung angeführt und gelten für die gesamte Formel;
  - alternativ kann der Quantor aber auch erst ab dem Punkt in der Formel eingeführt werden, ab dem er tatsächlich verwendet wird (allgemeine Beispiele):
    - $\forall x\ \forall y\ P(x) \rightarrow Q(x,y)$ oder $\forall x\ P(x) \rightarrow \forall y\ Q(x,y)$;
    - $\forall x\ \exists y\ P(x) \rightarrow Q(x,y)$ oder $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y)$;
    - $\exists x\ \forall y\ P(x) \rightarrow Q(x,y)$ oder $\exists x\ P(x) \rightarrow \forall y\ Q(x,y)$;
    - $\exists x\ \exists y\ P(x) \rightarrow Q(x,y)$ oder $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists y\ Q(x,y)$.

Übung — Diskussion

- Formalisieren Sie folgende quantifizierte Aussagen in Prädikatenlogik und versuchen Sie, deren Wahrheitswert zu bestimmen (Begründen Sie Ihre Entscheidung):

Aussage	Formalisierung	Wahrheitswert
"Alle Kreise sind rund."		
"Alle Kreise sind eckig."		
"Es gibt etwas, das ist ein Kreis und rund."		
"Einige Rechtecke sind quadratisch."		
"Alle grünen Männchen sind grün/Männchen."		

Übung — Diskussion

- Paraphrasieren Sie folgende quantifizierte Aussagen (wo sinnvoll und möglich) und übersetzen Sie beide Aussagen in eine prädikatenlogische Darstellung:

Aussage	Paraphrase	Formalisierung
"Nobody is perfect."		
"Nichts ist unmöglich."		
"Es gibt nichts, was es nicht gibt."		
"Alles hat einen Anfang und ein Ende."		
"Für jeden Topf gibt es einen Deckel."		

Übung – Vertiefung

* Übersetzen Sie folgende quantifizierte Aussagen in eine prädikatenlogische Formalisierung:

Aussage	Formalisierung
"Es gibt Bärtierchen."	
"Es gibt achtbeinige Lebewesen."	
"Eine Spinne ist achtbeinig."	
"Alle Bärtierchen sind Achtbeiner."	
"Jedes Bärtierchen ist ein Acht-beiner und achtbeinig."	
"Bären sind keine Bärtierchen."	

Übung — Vertiefung

"Bärtierchen sehen aus wie Gummibärchen."	
"Bärtierchen sind winzig und keine Bären."	
"Keine Spinne ist ein Bärtierchen oder umgekehrt."	
"Es gibt Achtbeiner, die keine Bärtierchen sind."	
"Falls ein totes ausgetrocknetes Bärtierchen nass wird, wird es (wieder) lebendig."	

Übung — Vertiefung

- Formalisieren Sie:

Aussage	Formalisierung
"Es gibt ein x, so dass x prim ist."	
"Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen."	
"Jede ganze Zahl hat einen Nachfolger."	
"Gerade Zahlen sind durch 2 teilbar."	
"Everybody's darling is nobody's darling."	

Schlüsse/Argumente

- Analog zu aussagenlogischen Schlüssen (Argumente) lassen sich auch prädikatenlogische Schlüsse formulieren:
  - Durch Verwendung von Prädikaten und/oder Quantoren können solche Argumente jedoch exakter und flexibler konstruiert werden;
  - dabei beschränkt man sich in der Regel jedoch auf zwei Prämissen und eine Konklusion ('Syllogismus'):
    - Die beiden Prämissen heißen Obersatz und Untersatz;
    - die Konklusion wird auch Schlusssatz genannt.

Schlüsse/Argumente

- Aussagenlogische und prädikatenlogische Argumente weisen strukturelle Gemeinsamkeiten auf:

	Aussagenlogischer Schluss	Prädikatenlogischer Schluss
Schema	$A \rightarrow B$ A	$\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ $P(m)$
	B	$Q(m)$
Beispiel	"Wenn Max arbeitet, ist er froh." "Max arbeitet."	"Alle Philosophen sind klug." "Max ist ein Philosoph."
	"Max ist froh."	"Max ist klug."
Hinweis	Die Aussagen A und B beziehen sich jeweils nur auf das Individuum Max und können nicht noch auf andere Individuen bezogen werden.	Die Individuenkonstante m (für Max) ist *ein* möglicher Wert für x, das sich über $\forall x$ ja auf alle Individuen des Diskurs-universums bezieht.

Schlüsse/Argumente

- Vier Beispiele für gültige Syllogismen, die in den Prämissen und der Konklusion den Existenz- und/oder (negierten) Allquantor enthalten:
  - Modus barbara (s. Aussagenlogik);
  - Modus darii;
  - Modus celarent;
  - Modus ferio.

  Prinzipiell können zahlreiche weitere gültige Syllogismen formuliert werden.

Schlüsse/Argumente

- *Modus barbara*:
  - Schema und Beispiel:

	Modus barbara
Sche-ma	$\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ $\forall x\ R(x) \rightarrow P(x)$
	$\forall x\ R(x) \rightarrow Q(x)$
Bei-spiel	"Alle Philosophen sind klug." "Alle Griechen sind Philosophen."
	"Alle Griechen sind klug."

  - $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \forall x\ R(x) \rightarrow P(x) \Rightarrow \forall x\ R(x) \rightarrow Q(x)$.

Schlüsse/Argumente

- *Modus darii*:
  - Schema und Beispiel:

	Modus darii
Schema	$\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ $\exists x\ R(x) \wedge P(x)$
	$\exists x\ R(x) \wedge Q(x)$
Beispiel	"Alle Philosophen sind klug." "Einige Menschen sind Philosophen."
	"Einige Menschen sind klug."

  - $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \exists x\ R(x) \wedge P(x) \Rightarrow \exists x\ R(x) \wedge Q(x)$.

Schlüsse/Argumente

- *Modus celarent*:
  - Schema und Beispiel:

	Modus celarent
Sche-ma	$\neg\exists x\ P(x) \wedge Q(x)$ $\forall x\ R(x) \rightarrow P(x)$
	$\neg\exists x\ R(x) \wedge Q(x)$
Bei-spiel	"Kein Mensch ist ein Außerirdischer." "Alle Philosophen sind Menschen."
	"Kein Philosoph ist ein Außerirdischer."

  - $\neg\exists x\ P(x) \wedge Q(x) \wedge \forall x\ R(x) \rightarrow P(x) \Rightarrow \neg\exists x\ R(x) \wedge Q(x)$.

Schlüsse/Argumente

- *Modus ferio*:
  - Schema und Beispiel:

	Modus ferio
Sche-ma	$\neg\exists x\ P(x) \wedge Q(x)$ $\exists x\ R(x) \wedge P(x)$
	$\exists x\ R(x) \wedge \neg Q(x)$
Bei-spiel	"Kein Dozent ist ein Außerirdischer." "Einige Philosophen sind Dozenten."
	"Einige Philosophen sind keine Außerirdischen."

  - $\neg\exists x\ P(x) \wedge Q(x) \wedge \exists x\ R(x) \wedge P(x) \Rightarrow \exists x\ R(x) \wedge \neg Q(x)$.

Schlüsse/Argumente

- Syllogismen bestehen stets aus *einstelligen* Prädikaten, die einem Subjekt eine Eigenschaft zuschreiben:
  - Würde man hingegen mehrstellige Prädikate wie Mögen(x,y) verwenden, so entstünden Fehlschlüsse, die nur auf den ersten Blick plausibel erscheinen;
  - Beispiel:

"Alle Kinder mögen Schokolade." **"Alle Eltern mögen (ihre) Kinder."**
"Alle Eltern mögen Schokolade."

Würde man als Prädikate Kinder-liebend(x) und Schokolade-liebend(x) ansetzen, wäre ein gültiges Argument möglich.

Schlüsse/Argumente

- Alle oben genannten Formen gültiger Argumente gehören zu den *Deduktionen*, die grundsätzlich wahrheitserhaltend sind:
  - Sind die Prämissen wahr, so ist auch die Konklusion wahr;
  - die Erhaltung der Wahrheit hat allerdings den Preis, dass die in der Konklusion geschlussfolgerte Aussage den Informationsgehalt aus den beiden Prämissen nicht übersteigt (man lernt aus einer Deduktion nichts Neues, sondern expliziert nur Verborgenes).

Schlüsse/Argumente

- Neben Deduktionen existieren zwei weitere Arten des Schlussfolgerns, die zwar nicht wahrheitserhaltend sind, jedoch für das menschliche Denken essenziell:
  - Die Denkschemata der *Induktion* und *Abduktion* erzeugen tatsächlich neue Aussagen (Information) um den Preis, dass diese eventuell nicht wahr ist:
    - Sie wird bis zum Erweis des Gegenteils zumindest als wahr vermutet;
    - dadurch lassen sich Annahmen (Hypothesen) generieren, die gestützt oder verworfen werden können.
  - Induktion und Abduktion stehen mit der Deduktion in systematischer Beziehung und basieren ebenfalls auf zwei Prämissen und einer Konklusion.

Schlüsse/Argumente

- Ausgangspunkt sind zwei Prämissen P_1 und P_2 sowie eine Konklusion Q:
  - V ist eine Allaussage ('Regel'/'Gesetz');
  - U ist eine Existenz-/Partikularaussage ('Ursache');
  - W ist eine Existenz-/Partikularaussage ('Wirkung').
- Deduktion, Induktion und Abduktion unterscheiden sich nur dadurch, welche zwei Aussagen als gegeben und welche als geschlussfolgert verwendet werden:
  - *Deduktion*: V und U gegeben, W gefolgert;
  - *Induktion*: U und W gegeben, V gefolgert;
  - *Abduktion*: V und W gegeben, U gefolgert.

Schlüsse/Argumente

- Übersicht und Beispiele:

Schema Prädikaten-/Aussagenlogik			Beispiel
Deduktion	V: $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ U: $P(m)$	V: $A \rightarrow B$ U: A	"Alle Philosophen sind klug." "Max ist ein Philosoph."
	W: $Q(m)$	W: B	"Max ist klug."
Induktion	U: $P(m)$ W: $Q(m)$	U: A W: B	"Max ist ein Philosoph." "Max ist klug."
	V: $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$	V: $A \rightarrow B$	"Alle Philosophen sind klug."
Abduktion	V: $\forall x\ P(x) \rightarrow Q(x)$ W: $Q(m)$	V: $A \rightarrow B$ W: B	"Alle Philosophen sind klug." "Max ist klug."
	U: $P(m)$	U: A	"Max ist ein Philosoph."

Schlüsse/Argumente

Anmerkungen zur Induktion und Abduktion:

- Induktion:
  - Schluss von einer Ursache und einer Wirkung (zwei oder mehr zugleich auftretende Einzelfälle/Ereignisse etc.) auf eine Gesetzmäßigkeit (Hypothesenbildung, Kategorienbildung);
  - treten bspw. Ursache und Wirkung nur zufällig gemeinsam auf und stehen tatsächlich in keinem Zusammenhang, ist das Gesetz falsch.
- Abduktion:
  - Schluss von einer Wirkung und einer Gesetzmäßigkeit auf eine Ursache ('diagnostischer Schluss', der eine Erklärung für die Wirkung unter Annahme des Gesetzes liefern soll);
  - da einer Wirkung verschiedene Ursachen und/oder Gesetze zugrunde liegen können, kann auch dieser Schluss falsch sein.

Übung – Vertiefung

- Formalisieren Sie folgende Schlüsse und ermitteln Sie, welche Art von Schluss vorliegt:

Beispiel	Formalisierung	Schluss-Art
P_1: "Tom ist ein Kater." P_2: "Tom ist ein Mäusejäger."		
Q_1: "Alle Kater sind Mäusejäger." Q_2: "Alle Mäusejäger sind Kater."		
P_1: "Alle Kater sind Mäusejäger." P_2: "Tom ist ein Kater."		
Q: "Tom ist ein Mäusejäger."		
P_1: "Alle Kater sind Mäusejäger." P_2: "Tom ist ein Mäusejäger."		
Q: "Tom ist ein Kater."		

Anwendungen

- Durch die prädikatenlogischen Formalisierungen lassen sich weitere semantische Phänomene gegenüber der Aussagenlogik ausdrücken:
  - Darstellung von (engl.) Pronomen mit integrierter Quantifizierung;
  - Darstellung des Zusammenhangs zwischen Aktiv- und Passivsätzen (Argumenttausch);
  - Darstellung bestimmter Arten von Negations- und Skopusambiguitäten;
  - Darstellung von Bedeutungsrelationen zwischen einzelnen Wörtern.

Anwendungen

- Darstellung von Pronomen:
  - Wörter wie "everybody", "somebody"/"anybody", "nobody" u. a. enthalten jeweils einen 'integrierten' Quantor der Prädikatenlogik:
    - "every": $\forall x$ ('alle');
    - "some"/"any": $\exists x$ ('einige');
    - "no": $\neg\exists x$ ('kein').
  - Den zweiten Teil der Bedeutung können neben "body" auch Wörter wie "one", "thing" oder "where" bilden:
    - "body"/"one": $P(x)$ ('P' wie 'Person');
    - "thing": $T(x)$ ('T' wie 'Thing')
    - "where": $L(x)$ ('L' wie 'Location').

Anwendungen

- Insgesamt lassen sich damit zwölf Pronomen darstellen (der semantische Unterschied zwischen "some" und "any" sei hierbei vernachlässigt, da es nur um die dahinterstehende Logik geht):

Quantor	**"-body"/"-one"**	**"-thing"**	**"-where"**
"every-"	"everybody/-one" $\forall x\ P(x)$	"everything" $\forall x\ T(x)$	"everywhere" $\forall x\ L(x)$
"some-"/ "any-"	"somebody/-one" $\exists x\ P(x)$	"something" $\exists x\ T(x)$	"somewhere" $\exists x\ L(x)$
"no-"	"nobody"/"none" $\neg\exists x\ P(x)$	"nothing" $\neg\exists x\ T(x)$	"nowhere" $\neg\exists x\ L(x)$

Anwendungen

- Darstellung von Aktiv- und Passivsätzen:
  - Durch Vertauschung der Argumente Subjekt und Objekt kann die Beziehung zwischen aktivischen und passivischen Verben formalisiert werden:
    - Im Passivsatz wird das Subjekt des Aktivsatzes zum (Präpositional-) Objekt (z. B. "Max sieht Mia." wird zu "Mia wird von Max gesehen.");
    - das Subjekt des Aktivsatzes ist im Passivsatz syntaktisch nicht zwingend, aber semantisch stets vorhanden;
    - letztlich wird durch die Passivierung einfach ein neues Verb erzeugt, dessen Argumentrollen gegenüber dem Aktivsatz vertauscht sind (vgl. auch "Besitzen(Subjekt,Objekt)" vs. "Gehören(Objekt,Subjekt)").
  - Überblick über die Möglichkeiten bei Prädikaten mit zwei Argumenten und entsprechend zwei Quantoren:

Anwendungen

Aktiv	Passiv
$\forall x\ \forall y\ M(x,y)$ "Jeder$_x$ mag jeden$_y$." "Alle$_x$ mögen alle$_y$."	$\forall x\ \forall y\ M(y,x)$ "Jeder$_y$ wird von jedem$_x$ gemocht." "Alle$_y$ werden von allen$_x$ gemocht."
$\exists x\ \exists y\ M(x,y)$ "Einige$_x$ mögen einige$_y$." "Es gibt welche$_x$, die einige$_y$ (andere) mögen."	$\exists x\ \exists y\ M(y,x)$ "Einige$_y$ werden von einigen$_x$ gemocht." "Es werden welche$_y$ von einigen$_x$ (anderen) gemocht."
$\exists x\ \forall y\ M(x,y)$ "Einige$_x$ mögen jeden$_y$." "Manche$_x$ mögen alle$_y$."	$\exists x\ \forall y\ M(y,x)$ "Jeder$_y$ wird von einigen$_x$ gemocht." "Alle$_y$ werden von welchen$_x$ gemocht."
$\forall x\ \exists y\ M(x,y)$ "Alle$_x$ mögen einige$_y$/welche$_y$." "Jeder$_x$ mag jemand$_y$ (anderes)."	$\forall x\ \exists y\ M(y,x)$ "Einige$_y$ werden von allen$_x$ gemocht." "Jemand$_y$ wird von jedem$_x$ gemocht."

Anwendungen

- Darstellung von Ambiguitäten:
  - Bestimmte Arten syntaktischer Mehrdeutigkeiten lassen sich durch prädikatenlogische Formalisierungen erfassen:
    - *Negationsambiguitäten*: Aus der Negation des Allquantors resultiert eine sprachliche Doppeldeutigkeit, die durch die Stellung der Negation in der prädikatenlogischen Formalisierung wiedergegeben werden kann;
    - *Skopusambiguitäten*: Bei der Kombination eines All- und eines Existenzquantors ergeben sich in der natürlichen Sprache Doppeldeutigkeiten, die durch die Reihenfolge der Quantoren in der Formalisierung erfasst werden können.
  - Übersicht:

Anwendungen

- Negationsambiguität (x sei eine Person P(x)):

Beispiel	Bedeutungen	Formalisierungen
"*Jeder* hat Regensburg *nicht* besucht."	"Keiner hat Regensburg besucht."	$\neg\exists x\ B(x,r)$ oder $\forall x\ \neg B(x,r)$
	"Nicht jeder hat Regensburg besucht."	$\neg\forall x\ B(x,r)$ oder $\exists x\ \neg B(x,r)$

- Skopusambiguität (x sei ein Tourist, y eine Stadt):

Beispiel	Bedeutungen	Formalisierungen
"*Jeder* Tourist besucht *eine* Stadt."	"*Irgendeine* (andere) Stadt besucht jeder Tourist."	$\forall x\ \exists y\ B(x,y)$ (y jeweils eine neue Stadt)
	"Es gibt *eine* Stadt, die jeder Tourist besucht."	$\exists y\ \forall x\ B(x,y)$ (y jeweils die selbe Stadt)

Anwendungen

- Durch prädikatenlogische Formalisierungen können begriffliche Beziehungen auch zwischen Wörtern (anstelle nur ganzer Sätze wie in der Aussagenlogik) ausgedrückt werden:
  - Mittels so genannter Bedeutungspostulate lässt sich die Beziehung zwischen Allgemeinbegriffen in Form von Prädikaten erfassen;
  - die Bedeutungsbeziehungen zwischen Prädikaten funk-tionieren analog den Satzrelationen bei Aussagen:
    - Synonymie und Antonymie;
    - Hyperonymie und Entailment;
    - Konversität.

Anwendungen

- Synonymie:
  - Die Bedeutungsgleichheit von Begriffen kann durch die wahre Bisubjunktion (Äquivalenz) ausgedrückt werden:
    - Synonymie zwischen zwei Begriffen bzw. Prädikaten P und Q liegt vor, wenn das Prädikat P genau auf die gleichen Dinge x zutrifft wie Q (d. h. wenn beide Prädikate unter genau den selben Bedingungen wahr sind);
    - allgemein formalisiert: $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ = $\forall x\, [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \Rightarrow P(x)]$.
  - Beispiele:
    - $\forall x$ Aufzug(x) $\Leftrightarrow$ Lift(x);
    - $\forall x$ Leben(x) $\Leftrightarrow$ Lebend-sein(x).

Anwendungen

- Antonymie:
  - Bedeutungsgegensätzlichkeit von Begriffen lässt sich durch die negierte Bisubjunktion (Nicht-Äquivalenz) erfassen (s. zudem das logische Quadrat!):
    - (Binäre) Antonymie zwischen zwei Begriffen bzw. Prädikaten P und Q liegt vor, wenn das Prädikat P immer genau dann zutrifft, wenn Q nicht zutrifft und umgekehrt;
    - allgemein formalisiert: $\forall x\ [P(x) \not\Leftrightarrow Q(x)] = \forall x\ \neg[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] = \forall x\ [P(x) \Rightarrow \neg Q(x)] \wedge [\neg P(x) \Rightarrow Q(x)]$.
  - Beispiele:
    - $\forall x$ Pluspol(x) $\not\Leftrightarrow$ Minuspol(x);
    - $\forall x$ Leben(x) $\not\Leftrightarrow$ Totsein(x);
    - $\forall x$ Volljährig(x) $\not\Leftrightarrow$ Minderjährig(x).

Anwendungen

- Hyp(er)onymie:
  - Bedeutungsüber- bzw. -untergeordnetheit von Begriffen kann durch die Implikation erfasst werden:
    - Hyperonymie zwischen zwei Begriffen bzw. Prädikaten P und Q liegt vor, wenn das Prädikat P immer genau dann zutrifft, wenn auch Q zutrifft, aber nicht umgekehrt (P ist das Hyperonym, Q das Hyponym);
    - allgemein formalisiert: $\forall x\ [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge \neg[Q(x) \Rightarrow P(x)]$.
  - Beispiele:
    - $\forall x\ [Mann(x) \Rightarrow Mensch(x)] \wedge \neg[Mensch(x) \Rightarrow Mann(x)]$;
    - $\forall x\ [Laufen(x) \Rightarrow Bewegen(x)] \wedge \neg[Bewegen(x) \Rightarrow Laufen(x)]$;
    - $\forall x\ [Bunt(x) \Rightarrow Farbig(x)] \wedge \neg[Farbig(x) \Rightarrow Bunt(x)]$.

Anwendungen

- Entailment:
  - Bedeutungsenthaltensein von Begriffen wird ebenfalls über eine zweifache Implikation realisiert:
    - Entailment zwischen zwei Begriffen bzw. Prädikaten P und Q bedeutet, dass wenn Q zutrifft, auch P zutrifft, und wenn Q nicht zutrifft, dann auch P nicht zutrifft;
    - allgemein formalisiert: $\forall x\ [P(x) \Rightarrow Q(x)] \wedge [\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)]$.
  - Beispiele:
    - $\forall x$ [Träumen(x) ⇒ Schlafen(x)] ∧ [¬Schlafen(x) ⇒ ¬Träumen(x)];
    - $\forall x$ [Blauweiß-kariert(x) ⇒ Blau(x)] ∧ [¬Blau(x) ⇒ ¬Blauweiß-kariert(x)].

Anwendungen

- Konversität:
  - Bedeutungskonversität von Begriffen aufgrund vertauschter Argumente bei zweistelligen Prädikaten kann durch die Implikation ausgedrückt werden:
    - Konversität zwischen zwei Begriffen bzw. Prädikaten P und Q liegt vor, wenn nur die beiden Argumente x und y von P und Q vertauscht sind;
    - allgemein formalisiert: $\forall x\ \forall y\ [P(x,y) \Rightarrow Q(y,x)]$.
  - Beispiele:
    - $\forall x\ \forall y\ [\text{Elternteil}(x,y) \Rightarrow \text{Kind}(y,x)]$;
    - $\forall x\ \forall y\ [\text{Kind}(x,y) \Rightarrow \text{Elternteil}(y,x)]$;
    - $\forall x\ \forall y\ [\text{Besitzen}(x,y) \Rightarrow \text{Gehören}(y,x)]$;
    - $\forall x\ \forall y\ [\text{Über}(x,y) \Rightarrow \text{Unter}(y,x)]$.