Formale Semantik I: Aussagenlogik (Skript 2014)

Sprachwissenschaft
Universität Regensburg
Jürgen Reischer

Einführung

- Aussagenlogik ist ein Zweig der philosophisch-mathematischen Logik, der auch in der sprachwissenschaftlichen Semantik genutzt wird:
  - Gründerväter der Logik sind Aristoteles, George Boole, Gottlob Frege, Bertrand Russell u. a.;
  - Ziel ist die Modellierung der Bedeutung von *Aussagesätzen* (Aussagen) im Hinblick auf Freges *Kompositionalitätsprinzip der Bedeutung*:

> Die Bedeutung eines komplexen Ausdrucks (Aussage) ergibt sich aus den Bedeutungen der elementaren Ausdrücke (Aussagen) und den Regeln ihrer Verknüpfung.

Einführung

* Die Bedeutung elementarer Ausdrücke bzw. Aussagen wird als abhängig von (der Beurteilung) ihrer Wahrheit oder Falschheit betrachtet:

  > Zwei Aussagesätze, von denen der eine wahr und der andere falsch sind, können nicht dieselbe Bedeutung haben.

  Dies besagt jedoch noch nichts darüber, wie die Bedeutung eines Aussagesatzes genau zu fassen ist:

  > Die Bedeutung eines Aussagesatzes zu kennen setzt voraus, die *Bedingungen* angeben zu können, unter denen der Satz wahr oder falsch wird (in Bezug auf die real-faktische oder eine möglich-fiktive Welt).

Einführung

- Die *Aussagenlogik* oder *propositionale Logik* (engl. 'proposition' = Aussage) liefert einen formalen Analyserahmen zur Erfassung und Darstellung der Bedeutung von Aussagesätzen:
  - Die Bedeutung eines Aussagesatzes zu kennen ist Voraussetzung dafür, ihn vor dem Hintergrund der realen (oder einer fiktiven) Welt zu verstehen:
    - Dabei stellt sich die Frage, wie ein Satz mit der Situation in der jeweiligen Welt übereinstimmt (korrespondiert), z. B. der Satz "Es ist sonnig in Regensburg am 30.3.2014.";
    - im Speziellen wird der Satz auf seine *Wahrheit* oder *Falschheit* bezüglich der Realität dahingehend untersucht, ob der ausgesagte Sachverhalt zutrifft/besteht bzw. der Fall ist oder nicht.

Einführung

- Die Aussage eines Satzes ist ihr *propositionaler Kern*, der allein als wahr oder falsch beurteilt werden kann:
  - Die Proposition ist der Aussageinhalt eines Satzes unabhängig von der Form, Funktion oder Verwendung des Satzes als Frage oder Befehl;
  - die folgenden Sätze haben daher alle denselben propositionalen Aussagegehalt (Proposition kursiv):
    - "*Max isst eine Orange*.", "*Die Orange wird von Max gegessen*.";
    - "*Max isst eine Apfelsine*.", "*Die Apfelsine wird von Max gegessen*.";
    - "*Isst Max eine Orange?*", "Ist es wahr, *dass Max eine Orange ist?*";
    - "*Max, iss eine Orange!*", "*Max*, du sollst *eine Orange essen!*".

Einführung

- Jeder Sprecher/Hörer, der einen Aussagesatz korrekt mit den Fakten der Welt abgleichen kann, versteht den Satz und kennt dessen Bedeutung:
  - Hierzu werden die *Wahrheitsbedingungen* des Satzes formuliert, der es ermöglicht, eindeutig die Wahrheit oder Falschheit des Satzes zu beurteilen:
    - Halbwahre oder möglicherweise wahre Aussagen wie "Es gibt vielleicht Außerirdische." werden nicht betrachtet, da sie einen dritten Wahrheitswert jenseits von wahr oder falsch benötigten (*Bivalenzprinzip*: *zwei*wertige Logik, 'tertium non datur');
    - ebenso ausgeschlossen sind grundsätzlich nicht-wahrheitsfähige Sätze wie "Der gegenwärtige König von Frankreich ist kahl.".

Einführung

- Desweiteren werden in der Aussagenlogik nur solche Aussagesätze betrachtet, deren Wahrheitswert *absolut* bestimmt werden kann:
  - Dies schließt Aussagen mit so genannten *indexikalischen Ausdrücken* (*Deiktika*) aus, deren Wahrheit allein vom Kontext abhängt und damit nur relativ zur Situation (Sprecher/Hörer, Ort und Zeit) bewertet werden kann ("*Heute* schreibe *ich hier diesen* Satz.");
  - jedoch kann jeder nur *relativ* bedeutungsvolle Ausdruck in einen *absolut* bedeutungsvollen umgewandelt werden, indem die Deiktika für Personen, Ort und Zeit durch absolute Angaben ersetzt werden ("Am 30.3.2014 schreibt Jürgen Reischer in seinem Arbeitszimmer den Satz 'Heute schreibe ich hier diesen Satz.'.", dessen Wahrheit beurteilt werden kann).
  - Pragmatische Phänomene werden so auf semantische reduziert.

Einführung

- Durch logische *Junktoren* wie "und", "oder", "wenn–dann" u. a. bzw. *Operatoren* wie "nicht" lassen sich aus Einzelaussagen dann zusammengesetzte Gesamtaussagen bilden, um deren resultierenden Wahrheitsgehalt zu beurteilen:
  - Elementaren (einfachen/einzelnen) Aussagen kann direkt ein Wahrheitswert zugeordnet werden, d. h. sie können als *wahr oder falsch* beurteilt werden (z. B. "Die Erde ist ein Planet." ist wahr, "Die Erde ist eine Sonne." ist falsch);
  - für komplexe (zusammengesetzte) Gesamtaussagen kann der Wahrheitswert aus den Einzelaussagen 'berechnet' werden (z. B. "Die Erde ist ein Planet *und* die Erde ist eine Sonne." ist *insgesamt* falsch, da *ein* Satz falsch ist).

Einführung

- Junktoren bzw. Operatoren sind zunächst rein logische Begriffe, die jedoch eine umgangs- wie sprachwissenschaftliche Interpretation besitzen:
  - Junktoren (Junktionen) werden auch *Verknüpfungen* oder *Konnektoren* genannt, die (Teil-)Sätze miteinander verbinden (z. B. durch Konjunktionen wie "und");
  - Operatoren hingegen verbinden hier keine Aussagesätze, sondern 'operieren' auf ihnen und verändern dadurch ihren Wahrheitswert insbesondere durch Negation (z. B. ist die Negation des Satzes "Die Erde ist eine Sonne." wahr: "Die Erde ist keine Sonne.").

Einführung

- Im mathematischen Sinne sind Junktoren und Operatoren beide *Funktionen*, die Wahrheitswerte als 'Eingabe' ('Argumente') bekommen und daraus *einen* neuen Wahrheitswert als 'Ausgabe' (Ergebnis) berechnen:
  - Bei einer komplexen Gesamtaussage aus *zwei* Einzelaussagen wird der Wahrheitswert aus den beiden einzelnen Wahrheitswerten berechnet und *ein* Gesamtwahrheitswert ermittelt (z. B. "[Die Erde ist ein Planet]$_{\text{wahr}}$ *und* [die Erde ist eine Sonne]$_{\text{falsch}}$.": 'wahr' *und* 'falsch' ergibt insgesamt 'falsch');
  - bei einer Negation wird der Wahrheitswert *einer* Aussage einfach umgedreht, woraus wiederum *ein* neuer Wahrheitswert resultiert (z. B. "Es ist nicht der Fall, [dass die Erde eine Sonne ist]$_{\text{falsch}}$."$_{\text{wahr}}$: 'falsch' umgedreht ist 'wahr').

Einführung

- Beispiele für Aussagen, die in der Aussagenlogik behandelt werden können:

Aussage	Wahrheitswert
"Es gibt Leben im All."	wahr
"Einstein war Sprachwissenschaftler."	falsch
"Der Mars hat zwei Monde."	wahr
"4 ist eine Primzahl."	falsch
"Die Sonne scheint oder die Sonne scheint nicht."	wahr
"Die Erde kreist um die Sonne und die Sonne um die Erde."	falsch
"Entweder ist 3 eine Primzahl oder sie ist keine."	wahr
"Wenn eine Zahl gerade ist, dann ist sie keine Primzahl."	falsch

Einführung

Zu unterscheiden sind zwei Arten von Aussagen:

- *analytische Aussagen*: Aussagen, deren Wahrheitsgehalt bereits aufgrund der Bedeutung der Wörter und deren semantischen Verbindungen zueinander ermittelt werden kann, ohne den Wahrheitsgehalt gegenüber den Tatsachen der Welt prüfen zu müssen (z. B. sind Sätze wie "Eine Apfelsine ist eine Orange." oder "Entweder Elvis lebt oder er ist tot." bereits aufgrund der Wortbedeutungen bzw. Satzkonstruktion wahr);
- *empirische Aussagen*: Aussagen, die von der Erfahrung abhängen und bezüglich ihrer Wahrheit gegenüber der Welt erst abgeprüft werden müssen, da die Wahrheit nicht direkt aus der Bedeutung der Wörter bzw. des Satzes hervorgeht (z. B. muss "Eine Apfelsine ist orange." oder "Elvis lebt." erst nachgeprüft werden).

Einführung

- Beispiele für Sätze, die in der Aussagenlogik *nicht* behandelt werden können:

Aussage	Wahrheitswert
"Diese Aussage ist falsch."	wahr oder falsch
"Das Quark ist das kleinste Teilchen der Materie."	wahr oder falsch
"Das Mammut war ein sanftmütiges Tier."	wahr oder falsch
"Alle Schwäne/Schafe sind weiß."	wahr oder falsch
"Der König von Frankreich ist kahlköpfig."	weder wahr noch falsch
"Ein Gnölpf ist eine Art Büxowupf."	weder wahr noch falsch
"Colorless green ideas sleep furiously." (Chomsky)	weder wahr noch falsch
"Schwören Sie, dass 3 eine Primzahl ist!"	weder wahr noch falsch

Übung – Diskussion

- Überlegen Sie, welchem der folgenden Sätze im Sinne der Aussagenlogik ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aussage	Kommentar
"Wer hat den Kuchen aufgegessen?"	
"Albert Einstein ist Albert Einstein."	
"Dass die Welt aber auch so schlecht ist!"	
"Kein Mensch hat zwei Herzen."	
"Ich könnte behaupten, dass 1+1=2 ist."	
"Es ist wahr, dass die Erde zwei Monde hat."	
"1+1 < 3−2"	

Junktoren/Operatoren

- Um die Wahrheit als Aspekt der Bedeutung komplexer Aussagen 'berechnen' zu können, werden einfache Aussagen mit Buchstaben versehen:
  - Jede elementare Aussage erhält abkürzend einen Großbuchstaben A, B, C, ..., X, Y, Z zugeordnet (mehr als die ersten drei braucht man selten);
  - die Buchstaben fungieren quasi als Eigennamen für die Aussagen; oftmals werden die Buchstaben auch als 'Variablen' betrachtet.

Junktoren/Operatoren

Beispiele:

- A: "Die Erde kreist um die Sonne.";
- B: "Einstein hat das Auto erfunden.";
- usw.

Dabei steht der Buchstabe aber zugleich auch für den Wahrheitswert dieser Aussage, der nurmehr mit 'w' für 'wahr' und 'f' für 'falsch' abgekürzt wird:

- $A_{\text{"Die Erde kreist um die Sonne."}} = w$;
- $B_{\text{"Einstein hat das Auto erfunden."}} = f$;
- usw.

Junktoren/Operatoren

- Diese Schreibweise hat vor allem Vorteile, wenn man die elementaren Aussagen mit Junktoren verknüpfen bzw. Operatoren verarbeiten will, von denen die wichtigsten folgende sind (s. detaillierte Definitionen unten):

Junktor/Operator	Alltagssprache	Interpretation in der Logik
Konjunktion '∧'	"und (zugleich)"	'sowohl–als auch'
Disjunktion '∨'	"oder" (lat. 'vel'!)	'und/oder' (inklusives Oder)
Kontrajunktion '⊕'	"entweder–oder"	'entweder–oder' (exklusives Oder)
Subjunktion '→'	"wenn–dann"	'falls', 'schon wenn–dann'
Bisubjunktion oder Bijunktion '↔'	"nur dann, wenn"	'dann und nur dann, wenn', 'genau dann, wenn'
Negation '¬'	"nicht"	'es ist nicht der Fall, dass'

Junktoren/Operatoren

Hinweis:

- Alle oben genannten Junktionen bzw. deren alltags-sprachliche Pendants (s. Interpretation) gehören aus linguistischer Sicht zur Kategorie der Konjunktionen bzw. Subjunktionen;
- die logischen Bezeichnungen sind daher nicht identisch mit den sprachwissenschaftlichen Kategorien:
  - Konjunktion und Subjunktion bilden jeweils eine *logische* Verknüpfung, die beide zur *linguistischen* Kategorie der Konjunktionen/Subjunktionen gehören (je nach Definition);
  - Disjunktion, Kontrajunktion und Bi(sub)junktion sind weitere *logische* Verknüpfungen, die ebenfalls zur *linguistischen* Kategorie der Konjunktionen/Subjunktionen zählen.

Junktoren/Operatoren

- Negation:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "nicht" negiert (verneint) eine Aussage ins Gegenteil, wobei die Negation einer Aussage falsch ist, wenn die Aussage wahr ist und umgekehrt;
    - dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht Teile einer Aussage (z. B. nur das Verb oder ein Adjektiv), sondern die Aussage *als Ganzes* negiert wird: "Es ist nicht der Fall, dass ...".
    - Die Negation stellt den einfachsten Fall einer logischen Funktion dar, indem die Aussage und deren Wahrheitswert einfach negiert (umgekehrt) wird.

Junktoren/Operatoren

- Formale Definition:
  - Hat man *eine* Aussage A, die als wahr oder falsch beurteilt werden kann, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage ¬A nach folgendem Schema:

Aussage	
A wahr (w)	¬A *falsch* (f) ('nicht A' ist *falsch*)
A falsch (f)	¬A *wahr* (w) ('nicht A' ist *wahr*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - ¬A ist insgesamt dann falsch, wenn die Aussage A wahr ist, und insgesamt wahr, wenn die Aussage A falsch ist;
  - ¬A ist also nur dann wahr, wenn A falsch ist.
- Beispiele:
  - A: "Einstein ist tot." = w;
  - ¬A: "Es ist nicht der Fall, dass Einstein tot ist." = "Einstein ist nicht tot." = "Einstein ist lebendig." = "Einstein lebt noch." = f;
  - ¬¬A: "Es ist nicht der Fall, dass es nicht der Fall ist, dass Einstein tot ist." = "Einstein ist nicht nicht tot" = "Einstein ist nicht lebendig." = "Einstein lebt nicht mehr." = w.

Junktoren/Operatoren

- Die Negation einer Aussage kann alltagssprachlich außer mit "nicht" auch durch andere sprachliche Mittel realisiert werden:
  - "kein":
    - "Kein Mensch war je auf dem Mars." = "Niemand war je auf dem Mars." = "Es ist nicht der Fall, dass ein Mensch (jemand) auf dem Mars war.";
    - "Kein Ding ist unmöglich." = "Nichts ist unmöglich." = "Es ist nicht der Fall, dass etwas unmöglich ist." = "Alles ist möglich.".
  - "weder–noch":

    "Weder ein Mann noch eine Frau waren je auf dem Mars." = "Kein Mann und keine Frau waren je auf dem Mars." = "Es ist nicht der Fall, dass jemals ein Mann oder eine Frau auf dem Mars waren.".

Junktoren/Operatoren

- Konjunktion:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "und" meint im logischen Sinne 'sowohl–als-auch', wobei zwei durch "und" verknüpfte Aussagen zugleich wahr sein müssen, wenn auch die Gesamtaussage wahr sein soll;
    - das alltagssprachliche "und" besitzt eine Reihe weiterer Bedeutungen, die hierbei nicht relevant sind (z. B. 'und–dann' oder 'und–auch' im temporalen Sinne).
    - Zwei logisch mit "und" verknüpfte Aussagen $A \wedge B$ sind vergleichbar mit der Schnittmenge der Wahrheitswerte dieser Aussagen: Die Gesamtaussage ist nur dann wahr, wenn beide Einzelaussagen zur Menge der wahren Aussagen zählen.

Junktoren/Operatoren

- *Formale Definition*:
  - Hat man zwei Aussagen A und B, die als wahr oder falsch beurteilt werden können, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage A ∧ B nach folgendem Schema:

Aussagen	**B wahr (w)**	**B falsch (f)**
A wahr (w)	A ∧ B *wahr* (w) ('A und B' ist *wahr*)	A ∧ B *falsch* (f) ('A und B' ist *falsch*)
A falsch (f)	A ∧ B *falsch* (f) ('A und B' ist *falsch*)	A ∧ B *falsch* (f) ('A und B' ist *falsch*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - $A \wedge B$ ist insgesamt nur dann wahr, wenn sowohl die Aussage A als auch B *zugleich* wahr sind, ansonsten ist die Gesamtaussage falsch;
  - $A \wedge B$ ist bereits dann falsch, wenn nur eine der beiden Aussagen falsch ist (und erst recht, wenn beide falsch sind).
- Beispiele:
  - A: "Die Erde kreist um die Sonne." = w,
    B: "Die Sonne ist eine Glühbirne." = f;
  - $A \wedge B$: "Sowohl die Erde kreist um die Sonne als auch die Sonne ist eine Glühbirne." = $w \wedge f = f$;
    $A \wedge \neg B$: "Sowohl die Erde kreist um die Sonne als auch die Sonne ist keine Glühbirne." = $w \wedge w = w$.

Junktoren/Operatoren

- Disjunktion:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "oder" meint hier im logischen Sinne 'und/oder', wobei von zwei derart verknüpften Aussagen die eine und/oder die andere wahr sein darf, soll die Gesamtaussage wahr sein (s. Bsp. unten);
    - das alltagssprachliche "oder" besitzt ebenfalls eine Reihe weiterer Bedeutungen, die hier nicht relevant sind (z. B. 'entweder–oder' [s. Kontrajunktion unten] oder 'und' wie in "Sprechstunde ist Montag und Mittwoch.").
    - Zwei logisch mit 'und/oder' verknüpfte Aussagen $A \vee B$ sind vergleichbar mit der Vereinigungsmenge der Wahrheitswerte dieser Aussagen: Die Gesamtaussage ist wahr, wenn bereits eine der beiden (und damit automatisch auch beide) Einzelaussagen zur Menge der wahren Aussagen zählt.

Junktoren/Operatoren

- Formale Definition:
  - Hat man zwei Aussagen A und B, die als wahr oder falsch beurteilt werden können, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage A ∨ B nach folgendem Schema:

Aussagen	**B wahr (w)**	**B falsch (f)**
A wahr (w)	A ∨ B *wahr* (w) ('A oder B' ist *wahr*)	A ∨ B *wahr* (w) ('A oder B' ist *wahr*)
A falsch (f)	A ∨ B *wahr* (w) ('A oder B' ist *wahr*)	A ∨ B *falsch* (f) ('A oder B' ist *falsch*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - $A \vee B$ ist insgesamt nur dann falsch, wenn sowohl die Aussage A als auch B zugleich falsch sind, ansonsten ist die Gesamtaussage wahr;
  - $A \vee B$ ist bereits dann wahr, wenn nur eine der beiden Aussagen wahr ist (und erst recht, wenn beide wahr sind).
- Beispiele:
  - A: "Die Riviera gehört zu Frankreich." = w,
    B: "Die Riviera gehört zu Italien." = w;
  - $A \vee B$: "Die Riviera gehört zu Frankreich und/oder zu Italien." = $w \vee w = w$;
    $A \vee \neg B$: "Die Riviera gehört zu Frankreich und/oder (aber) nicht zu Italien." = $w \vee f = w$.

Junktoren/Operatoren

- Kontrajunktion:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "oder" meint hier im logischen Sinne 'entweder–oder', wobei von zwei derart verknüpften Aussagen nur *entweder* die eine *oder* die andere wahr sein darf, soll auch die Gesamtaussage wahr sein;
    - von obiger Disjunktion unterscheidet sich die Kontrajunktion also dadurch, dass Letztere eine *falsche* Gesamtaussage liefert, wenn beide Einzelaussagen wahr sind.
    - Zwei logisch mit "entweder-oder" verknüpfte Aussagen $A \oplus B$ sind vergleichbar mit der Vereinigungsmenge der Wahrheitswerte dieser Aussagen abzüglich ihrer Schnittmenge: Die Gesamtaussage ist wahr, wenn *genau eine* der beiden (aber nicht beide) Einzelaussagen zur Menge der wahren Aussagen zählt.

Junktoren/Operatoren

- Formale Definition:
  - Hat man zwei Aussagen A und B, die als wahr oder falsch beurteilt werden können, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage A ⊕ B nach folgendem Schema:

Aussagen	**B wahr (w)**	**B falsch (f)**
A wahr (w)	A ⊕ B *falsch* (f) ('entweder A oder B' ist *falsch*)	A ⊕ B *wahr* (w) ('entweder A oder B' ist *wahr*)
A falsch (f)	A ⊕ B *wahr* (w) ('entweder A oder B' ist *wahr*)	A ⊕ B *falsch* (f) ('entweder A oder B' ist *falsch*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - A ⊕ B ist insgesamt nur dann falsch, wenn sowohl die Aussage A als auch B beide falsch oder beide wahr sind, ansonsten ist die Gesamtaussage wahr;
  - A ⊕ B ist falsch bei identischen Wahrheitswerten der beiden Aussagen.
- Beispiele:
  - A: "'Uli X.' bezeichnet einen Mann." = w,
    B: "'Uli X.' bezeichnet eine Frau." = f;
  - A ⊕ B: "Entweder 'Uli X.' bezeichnet einen Mann oder 'Uli X.' bezeichnet eine Frau." = w ⊕ f = w;
    A ⊕ ¬B: "Entweder 'Uli X.' bezeichnet einen Mann oder 'Uli X.' bezeichnet keine Frau." = w ⊕ w = f.

Junktoren/Operatoren

- Subjunktion:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "wenn–dann" bedeutet in der Logik eine Art 'falls' im Sinne einer bedingten Schlussfolgerung (Konsequens) unter einer bestimmten Voraussetzung (Antezedens), wobei die zwei verknüpften Aussagen nur dann eine falsche Gesamtaussage ergeben, wenn das Antezedens A wahr und das Konsequens B falsch ist ('aus etwas Wahrem darf nichts Falsches folgen');
    - in den anderen drei Fällen ist die Subjunktion wahr:
      - *A und B sind wahr*: Wenn aus etwas Wahrem etwas Wahres folgt, ist der 'Schluss' wahr (aus Wahrem darf Wahres geschlossen werden);
      - *A ist falsch und B ist wahr/falsch*: Aus Falschem folgt Falsches oder auch *zufällig* Wahres ('Ex falso sequitur quodlibet.').

Junktoren/Operatoren

- Formale Definition:
  - Hat man zwei Aussagen A und B, die als wahr oder falsch beurteilt werden können, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage A → B nach folgendem Schema:

Aussagen	**B wahr (w)**	**B falsch (f)**
A wahr (w)	A → B *wahr* (w) ('wenn A, dann B' ist *wahr*)	A → B *falsch* (f) ('wenn A, dann B' ist *falsch*)
A falsch (f)	A → B *wahr* (w) ('wenn A, dann B' ist *wahr*)	A → B *wahr* (w) ('wenn A, dann B' ist *wahr*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - A → B ist insgesamt nur dann falsch, wenn die Aussage A wahr und B zugleich falsch ist, ansonsten ist die Gesamtaussage immer wahr;
  - A → B ist damit immer wahr, außer aus etwas Wahrem folgt etwas Falsches.
- Beispiele:
  - A: "Der Lichtschalter ist an." = w,
    B: "Die Lampe brennt." = w;
  - A → B: "Wenn der Lichtschalter an ist, brennt die Lampe." = w → w = w.
    A → ¬B: "Wenn der Lichtschalter an ist, brennt die Lampe nicht." = w → f = f.

Junktoren/Operatoren

Das alltagssprachliche "wenn–dann" liefert nur eine näherungsweise Übersetzung des logischen 'falls', das nicht alle alltagssprachlichen Aspekte abdeckt:

- *keine kausale Verknüpftheit*:
  - "Wenn Max ins Kino geht, geht auch Mia mit." suggeriert, dass Mia nicht geht, wenn Max nicht geht;
  - das logische 'falls' fordert das jedoch gerade nicht ein (falls das Antezedens falsch ist, kann das Konsequens falsch oder auch wahr sein und die Gesamtaussage ist in beiden Fällen trotzdem wahr).
- *keine hypothetische Verknüpftheit*:
  - "Wenn ich reich wäre, bräuchte ich nie mehr zu arbeiten." macht das Antezedens per se falsch, woraus Beliebiges folgt;
  - das ist alltagssprachlich aber gerade nicht gemeint.

Junktoren/Operatoren

Im Hinblick auf das alltagssprachliche Verständnis des logischen Wenn-Dann ist ferner zu beachten, dass die subjungierten Teilaussagen A → B inhaltlich keinesfalls miteinander verbunden sein müssen:

- Vielmehr geht es um die *getrennte* Beurteilung der Wahrheit/ Falschheit von A *unabhängig von* der Wahrheit/Falschheit von B:
  - *Unabhängig* vom konkreten Inhalt und der inhaltlichen Beziehung zwischen A und B ist A → B *insgesamt* immer dann falsch, wenn A für sich allein wahr und B für sich allein falsch ist;
  - da aus Falschem Beliebiges folgt, ist der Satz "Wenn 1+1 = 3 ist, dann ist die Orange blau." *insgesamt* eine wahre Aussage (f → f = w!).
- Nur weil A → B *als Gesamtaussage wahr* ist, bedeutet dies nicht automatisch auch die Wahrheit von B (und auch nicht von A)!

Junktoren/Operatoren

Stattdessen kann man sich eine zeitliche Koinzidenz vorstellen ('sobald' statt 'falls'):

- "Wenn die Regenschirme aufgespannt werden, dann regnet es.";
- "Wenn es regnet, dann werden die Regenschirme aufgespannt.".

Keiner der beiden Antezedens-Sätze bewirkt *kausal* das jeweilige Konsequens: Wenn es regnet, *muss* ich den Schirm nicht aufspannen; und wenn ich einen Schirm aufspanne, *muss* es nicht regnen (z. B. im Geschäft beim Kauf eines neuen Regenschirms).

Junktoren/Operatoren

- Bi(sub)junktion:
  - *Inhaltliche Interpretation*:
    - "nur/genau-dann–wenn" meint in der Logik eine Art doppelt gerichtetes 'falls' ("wenn–dann und dann–wenn"), wobei zwei auf diese Weise verknüpfte Aussagen beide wahr oder falsch sein müssen, soll die Gesamtaussage wahr sein;
    - die Bijunktion stellt damit eine doppelte Subjunktion in dem Sinne dar, dass beide Schlussfolgerungsrichtungen vom Antezedens zum Konsequens und vom Konsequens zum Antezedens zusammen berücksichtigt werden (daher auch der Doppelpfeil);
    - bisweilen wird statt '$\leftrightarrow$' auch '$\equiv$' als Zeichen verwendet.

Junktoren/Operatoren

- Formale Definition:
  - Hat man zwei Aussagen A und B, die als wahr oder falsch beurteilt werden können, so ergibt sich die Wahrheit der Gesamtaussage A ↔ B nach folgendem Schema:

Aussagen	B wahr (w)	B falsch (f)
A wahr (w)	A ↔ B *wahr* (w) ('wenn A, dann B und umgekehrt' ist *wahr*)	A ↔ B *falsch* (f) ('wenn A, dann B und umgekehrt' ist *falsch*)
A falsch (f)	A ↔ B *falsch* (f) ('wenn A, dann B und umgekehrt' ist *falsch*)	A ↔ B *wahr* (w) ('wenn A, dann B und umgekehrt' ist *wahr*)

Junktoren/Operatoren

- Mit anderen Worten:
  - A ↔ B ist insgesamt wahr, wenn beide Aussagen A und B jeweils wahr oder falsch sind, d. h. haben die Aussagen unterschiedliche Wahrheitswerte, ist die Gesamtaussage falsch;
  - A ↔ B stellt damit die Umkehrung (Negation) der Kontrajunktion dar, die genau dann wahr ist, wenn die Wahrheitswerte gerade verschieden sind.
- Beispiele:
  - A: "Uli ist eine Frau." = w,
    B: "Uli hat zwei X-Chromosomen." = w;
  - A ↔ B: "Uli ist eine Frau nur/genau dann, wenn sie zwei X-Chromosomen hat." = w ↔ w = w;
    A ↔ ¬B: "Uli ist eine Frau nur/genau dann, wenn sie nicht zwei X-Chromosomen hat." = w ↔ f = f.

Junktoren/Operatoren

- Zusammenfassung der Operatoren/Junktoren:

Operator Junktor	A	w	w	f	f	Beschreibung
	B	w	f	w	f	
¬	¬A (*)	f	f	w	w	Negation ('nicht')
∧	A ∧ B	w	f	f	f	Konjunktion ('und')
∨	A ∨ B	w	w	w	f	Disjunktion ('und/oder')
⊕	A ⊕ B	f	w	w	f	Kontrajunktion ('entweder–oder')
→	A → B	w	f	w	w	Subjunktion ('wenn–dann')
↔	A ↔ B	w	f	f	w	Bijunktion ('nur dann–wenn')

(*) Für die Negation ist nur A relevant, B kann ignoriert werden.

Junktoren/Operatoren

- Für die Junktoren '$\wedge$', '$\vee$', '$\oplus$' und '$\leftrightarrow$' *außer* '$\rightarrow$' gilt, dass A und B vertauscht werden können, ohne dass sich der Wahrheitswert der Gesamtaussage ändert (Kommutativität):
  - $A \wedge B = B \wedge A$ (symmetrisch);
  - $A \vee B = B \vee A$ (symmetrisch);
  - $A \oplus B = B \oplus A$ (symmetrisch);
  - $A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$ (symmetrisch);
  - $A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$ (unsymmetrisch).

  Da sich die Negation nur auf *eine* Aussage bezieht, stellt sich die Frage der Symmetrie hierfür nicht.

Junktoren/Operatoren

- Die Bijunktion kann auch durch eine doppelte Subjunktion umschrieben werden (daher auch der Name Bisubjunktion):
  - $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ (doppelte Subjunktion).
  - Die Gleichheit kann man per Wertetabelle nachprüfen:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) = C$	$(B \rightarrow A) = D$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = C \wedge D$	
w	w	w	w	w	w ∧ w	w
w	f	f	f	w	f ∧ w	f
f	w	f	w	f	w ∧ f	f
f	f	w	w	w	w ∧ w	w

identisch

Junktoren/Operatoren

- Auch die Subjunktion selbst kann wiederum durch eine Disjunktion und Negation umschrieben werden:
  - $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ (erst Negation, dann Disjunktion!).
  - Auch hier kann die Gleichheit anhand einer Wahrheitswertetabelle überprüft werden:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A = C$	B	$\neg A \vee B = C \vee B$	
w	w	w	f	w	f ∨ w	w
w	f	f	f	f	f ∨ f	f
f	w	w	w	w	w ∨ w	w
f	f	w	w	f	w ∨ f	w

identisch

Übung – Diskussion

- Versuchen Sie, die in folgenden Sätzen vorhandenen alltagssprachlichen Konnektionen und Negationen auf die logischen Junktionen/Operatoren abzubilden und die Gesamtaussage aus elementaren Aussagen A, B etc. zusammenzusetzen:

Aussagesatz	Aussagenlogische Formalisierung
"Max ist unschuldig."	
"Max fliegt an Ostern nach Amerika oder Australien in den Urlaub."	

Übung — Diskussion

Aussagesatz	Aussagenlogische Formalisierung
"Max geht mit Mia heute abend etwas Essen oder Trinken."	
"Sowohl Max als auch Mia gehen heute abend aus."	
"Max bleibt zu Hause, aber Mia geht aus."	
"Max ist kein Einstein oder Newton."	

Übung — Diskussion

Aussagesatz	Aussagenlogische Formalisierung
"Max fliegt nicht nach Australien oder Amerika, sondern nach Asien."	
"Falls Max mit Mia ausgeht, wird es wohl kein langer Abend."	
"Wenn Max nicht aus-geht, dann auch Mia nicht und umgekehrt."	

Übung — Vertiefung

- Weisen Sie anhand einer Wahrheitswertetabelle nach, dass folgende Gleichheiten gelten:
  - Umschreibungen der Kontrajunktion:
    - $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$ bzw. $\neg(A \oplus B) = A \leftrightarrow B$ (eines von beiden);
    - $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$; $A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$. (eines von beiden).
  - Versuchen Sie, die alltagssprachliche Junktion "weder–noch" ("neither–nor") logisch zu erfassen:
    - Umschreiben Sie "weder A noch B" zunächst alltagssprachlich mit Hilfe anderer Junktionen (vgl. das Mars-Beispiel bei der Definition der Negation oben);
    - erstellen Sie dann anhand der Umschreibungen eine Werte-tabelle, die alle Fälle für A und B berücksichtigt.

Junktoren/Operatoren

- Folgende weitere Identitäten gelten:
  - Gesetze von *DeMorgan* ('Gesetz' meint hier einfach nur die logische Gleichheit):

Gesetz/Gleichheit	Abkürzung	Interpretation
$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B$	$A \mathbin{\bar{\lor}} B$	"nor" = 'not ... or ...'
$\neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B$	$A \mathbin{\bar{\land}} B$	"nand" = 'not ... and ....'

Merke: Die Negation vor der Klammer verteilt sich auf die Variablen in der Klammer, die Klammer verschwindet und der Operator dreht sich um (d. h. '∨' wird zu '∧' und umgekehrt).

Junktoren/Operatoren

- Ferner gelten folgende Gesetze (Beispielauswahl, da es letztlich beliebig viele gibt):

Gesetz/Gleichheit	Bemerkung
$A \rightarrow B = \neg A \vee B$ Beweis s. oben!	'wenn A, dann B' = 'A ist nicht der Fall oder B' (?) (rein logische, aber keine alltagssprach-liche Gleichheit)
$A \rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B)$ da $\neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee B$ nach DeMorgan und $\neg A \vee B = A \rightarrow B$ (s. o.)	'wenn A, dann B' = 'es ist nicht der Fall, dass A der Fall ist, B aber nicht' = 'wenn A der Fall ist, ist auch B der Fall' = 'wenn A, dann B' (!) (auch alltagssprachlich sinnvoll)

Junktoren/Operatoren

Gesetz/Gleichheit	Bemerkung
$A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$ da $A \rightarrow B = \neg A \vee B$ (s. o.) $= B \vee \neg A =$ $\neg\neg B \vee \neg A = \neg B \rightarrow \neg A$	'wenn A, dann B' = 'wenn nicht B, dann auch nicht A' = 'wenn B nicht der Fall ist, ist auch A nicht der Fall' = 'wenn A der Fall ist, ist auch B der Fall'
$A \leftrightarrow B =$ $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$ da $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge$ $(B \rightarrow A)$ und $B \rightarrow A =$ $\neg A \rightarrow \neg B$ (vertauschtes $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$!)	'nur wenn A, dann auch B' = 'wenn A, dann B und wenn nicht B, dann auch nicht A' = 'wenn A der Fall ist, dann ist auch B der Fall, und wenn A nicht der Fall ist, dann ist auch B nicht der Fall' = 'A immer genau dann, wenn auch B'

Junktoren/Operatoren

- Besondere Gesamtaussagen sind *Tautologien* und *Kontradiktionen*, die aus logischer Sicht schon aufgrund ihrer bloßen Satzform *immer* wahr bzw. falsch sind:

	Variablen	Aussage	Beispiel
Tautologien (wahr)	**eine**	$A \vee w$	"$[1 + 1 = 2]_A$ oder $[\text{Immerwahres}]_w$."
		$A \vee \neg A$	"$[1 + 1 = 2]_A$ oder $[1 + 1 \neq 2]_{\neg A}$."
		$A \rightarrow A$, $A \leftrightarrow A$	"(nur) wenn $[1 + 1 = 2]_A$, dann $[1 + 1 = 2]_A$."
	zwei	$A \rightarrow (B \vee \neg B)$	"Wenn $[1+1 = 2]_A$, dann $[1=1]_B$ oder $[1\neq1]_{\neg B}$".
		$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	"Aus A folgt B oder aus B folgt A."
	drei	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$	"Wenn aus A B folgt und aus B C, dann folgt aus A auch C."

Junktoren/Operatoren

	Variablen	Aussage	Interpretation
Kontradiktionen (falsch)	**eine**	$A \wedge f$	"$[1 + 1 = 2]_A$ und $[\text{Immerfalsches}]_f$."
		$A \wedge \neg A$	"$[1 + 1 = 2]_A$ und $[1 + 1 \neq 2]_{\neg A}$." (beides zugleich kann nicht gelten)
		$\neg(A \rightarrow A)$	"Es ist nicht der Fall, dass aus $[1 + 1 = 2]_A$ $[1 + 1 = 2]_A$ folgt."
	zwei	$(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B)$	"Wenn $[1 = 1]_A$ oder $[1 \neq 1]_{\neg A}$, dann $[1 + 1 = 2]_B$ und $[1 + 1 \neq 2]_{\neg B}$."
		$(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)$	"$[1 + 1 = 2]_A$ und $[1 + 1 \neq 2]_{\neg A}$ oder $[1 = 1]_B$ und $[1 \neq 1]_{\neg B}$."
	drei	$\neg\{(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$	Die Negation der immer wahren Tautologie von oben (letzte Zeile) führt im Gegenteil zu einer immer falschen Kontradiktion.

Junktoren/Operatoren

- Da Tautologien als Gesamtaussage immer wahr sind, sind sie semantisch eigentlich informationslos (null-informativ):
  - Der Informationsgehalt der Gesamtaussage übersteigt den Informationsgehalt der Einzelaussagen nie, d. h. man holt nicht 'mehr' Bedeutung heraus, als man vorher bereits hineingesteckt hat;
  - selbst scheinbar 'erhellende' Tautologien wie $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ liefern uns letztlich keine *neue* Information, da $(A \rightarrow C)$ bereits in $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ semantisch eingearbeitet/vorangelegt ist (vgl. analog 'wenn A = B und B = C, dann auch A = C');

Junktoren/Operatoren

- nichtsdestotrotz wird mit dem *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch* (kurz: *Satz vom Widerspruch*) ein wichtiges Prinzip der Logik als Tautologie formuliert, das besagt: $\neg(A \wedge \neg A)$, d. h. es ist nicht der Fall, dass eine Aussage A und *zugleich* auch die Negation von A zutrifft;
- im Zusammenhang mit Tautologien werden gerne weitere abkürzende Symbole verwendet:
  - Das Symbol $\top$ (ähnlich dem Buchstaben 'T' für 'true') steht für eine Tautologie als solche, wenn es nur um den Wahrheitswert 'wahr' ohne Bezugnahme auf eine Aussage geht ('das Wahre');
  - die Schreibweise $\vDash\alpha$ (α steht stellvertretend für irgendeine elementare oder komplexe Aussage) drückt aus, dass es sich bei der Aussage α um eine Tautologie handelt, die stets wahr ist.

Junktoren/Operatoren

- Da Kontradiktionen als Gesamtaussage immer falsch sind, sind sie semantisch per se widersprüchlich:
  - Im Gegensatz zu einer nullinformativen Tautologie wäre eine Kontradiktion 'unendlich' informativ, wenn sie denn als Gesamt-aussage wahr werden könnte (der symmetrisch grenzwertige Fall zur Tautologie);
  - man stelle sich vor, die Zahl 2 könnte *gleichzeitig gerade und ungerade* sein (A = "2 ist eine gerade Zahl.", $A \wedge \neg A$ *wäre* w): Das wäre gleichsam eine so 'unglaubliche' Erkenntnis, dass sie wissenschaftlich alles Bisherige in den Schatten stellen würde;
  - analog zu $\top$ steht $\bot$ (die 'umgekehrte Wahrheit') für den falschen Wahrheitswert als solchen (das 'Falsche'), wenn kein Bezug auf irgendeine bestimmte Aussage gemeint ist.

Junktoren/Operatoren

- Konjunktion und Disjunktion haben Ähnlichkeit mit den arithmetischen Zahlenoperatoren der Multiplikation und Addition:
  - Die Konjunktion wird auch gerne als '•' und die Disjunktion als '+' geschrieben;
  - der Wahrheitswert f wird wie eine 0 und der Wert w wie eine 1 behandelt.

Dadurch lässt sich die Analogie verdeutlichen:

•	1	0
1	1	0
0	0	0

+	1	0
1	2	1
0	1	0

Die 2 bei der Addition (Disjunktion) gilt als Nicht-0 (¬f) und damit als 1 (w).

Übung — Diskussion

- Überlegen bzw. überprüfen Sie anhand eines geeigneten Verfahrens, ob folgende grundlegende Aussagen der Logik Tautologien sind, d. h. für alle Fälle wahr sind:
  - *Es gibt keinen dritten Wahrheitswert*: $\neg A \vee A$ ('A trifft zu oder es trifft nicht zu').
  - *Aus einer Aussage folgt nicht auch noch ihr Gegenteil*: $\neg(A \rightarrow \neg A)$ ('Es ist nicht der Fall, dass aus A Nicht-A folgt').
  - *Aus Falschem folgt Beliebiges*: $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ ('Wenn A nicht der Fall (falsch) ist, folgt daraus: Wenn A der Fall ist, folgt irgendeine Aussage B').

Übung — Vertiefung

- Den folgenden beiden Aussagen liegt dieselbe 'Logik' zugrunde:
  - "Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich's Wetter oder es bleibt, wie's ist.";
  - "Sondierungsgespräche führen zu Koalitionsverhandlungen oder auch nicht." (Alexander Dobrindt nach der Bundestagswahl 2013 vor den ersten Sondierungsgesprächen).

Formulieren Sie jeweils die den beiden Sätzen zugrunde liegenden Aussagen A und B (es sind jeweils nur zwei!); erstellen Sie dann *eine* formalisierte Gesamtaussage aus A und B, die beide Sätze zugleich abbildet (identische 'Logik').

Prüfen Sie schließlich durch eine Wertetabelle nach, welche Wahrheitswerte aus dem Schema für alle Wahrheitswerte-kombinationen von A und B resultieren.

Schlüsse/Argumente

- Mit Hilfe der Aussagenlogik lassen sich Aussagesätze der Alltagssprache als Ausdrücke der logischen Sprache formulieren und formalisieren:
  - Zum einen dient dies der einfachen Darstellung der Bedeutung von Konnektoren/Negatoren wie "und", "oder", "nicht" etc. und den dadurch verknüpften Aussagen;
  - zum anderen spielen aussagenlogische Formalisierungen auch beim logischen Schließen/Denken eine entscheidende Rolle:
    - Aus vorausgesetzten/gegebenen Aussagen (Prämissen) werden weitere Aussagen erschlossen (Konklusionen);
    - alltagssprachlich werden solche Schlussfolgerungen gerne durch "also" oder "folglich" zwischen Prämisse(n) und Konklusion(en) ausgedrückt.

Schlüsse/Argumente

- Logische Schlüsse werden als Voraussetzung guten Argumentierens betrachtet (vor allem in der Wissenschaft):
  - Argumente können als *Folge von Aussagen* verstanden werden, die in bestimmten formalen und inhaltlichen Beziehungen zueinander stehen:
    - Einige Aussagen dienen dabei als Prämissen im Sinne von Aussagen, die (als wahr) vorausgesetzt werden;
    - eine (oder seltener mehrere) Aussagen dienen ferner als Konklusion(en), die als aus den Prämissen gefolgerte (wahre) Aussage(n) fungieren.

Schlüsse/Argumente

Beispiel für einen Schluss:

* Schlüsse werden gerne so dargestellt, dass die Prämissen und die Konklusion durch einen Schluss(folgerungs)-Strich voneinander getrennt werden (P für Prämissenaussage[n], Q für Konklusionsaussage[n]):

P_1: "Entweder ist $1+1 = 2$ oder $1+1 \neq 2$." (w)

P_2: "Es ist nicht der Fall, dass $1+1 \neq 2$ ist." (w)

Q: "$1+1 = 2$" (w)

Schluss

* Rot bzw. grün markiert sind die beteiligten (Einzel-) Aussagen, wobei rote Aussagen falsch, grüne wahr sind (P_1 ist eine komplexe Aussage aus zwei Einzelaussagen).

Schlüsse/Argumente

- Ausführlicher interpretiert könnte das Argument so umschrieben werden:
  - Durch Prämisse P_1 wird ausgesagt, dass *eine* von beiden Aussagen 1+1 = 2 (A) *oder* 1+1 ≠ 2 (¬A) der Fall (wahr) sein *muss*, aber nicht beide zugleich: $A \oplus \neg A = w$;
  - in Prämisse P_2 wird ausgesagt, dass die *falsche* Aussage 1+1 ≠ 2 (¬A) gerade *nicht der Fall* ist: $\neg\neg A = w$;
  - in der Konklusion wird nun gefolgert, dass *deshalb* die Aussage 1+1 = 2 (A) der Fall (wahr) sein muss: $A = w$.

  Alltagssprachlich könnte dies so ausformuliert werden: "Wenn wir wissen, dass *entweder* 1+1 = 2 *oder* 1+1 ≠ 2 ist und wir zudem wissen, dass 1+1 ≠ 2 *nicht* der Fall ist, dann muss ja wohl 1+1 = 2 der Fall sein."

Schlüsse/Argumente

- Ziel des guten Argumentierens ist letztlich, dass die Prämissen die Konklusion *stützen* und das Argument damit *gültig* oder gar *schlüssig* (wohlbegründet) ist:
  - *Gültigkeit eines Arguments* (engl. 'validity'):
    - Gültigkeit eines Arguments liegt vor unter folgender Bedingung: *Wenn die Prämissen wahr wären/sind, dann ist es rational, auch die Konklusion als wahr zu erachten*;
    - sind die Prämissen wahr und ist die Konklusion falsch, dann liegt kein gültiges Argument vor (aus Wahrem darf nichts Falsches gefolgert werden);
    - dabei ist noch nichts darüber ausgesagt, was im Falle falscher Prämissen und zugleich wahrer oder falscher Konklusion folgt (aus Falschem könnte bspw. 'zufällig' Richtiges folgen).

Schlüsse/Argumente

- *Schlüssigkeit/Fundiertheit eines Arguments* (engl. 'soundness'):
  - Schlüssigkeit eines Arguments liegt vor unter folgender Bedingung: *Das Argument ist gültig und alle seine Prämissen sind wahr* (die Wahrheit der Konklusion ergibt sich bereits aus der Gültigkeit des Arguments, s. oben);
  - ist ein Argument schlüssig, d. h. sind alle Prämissen und die Konklusion wahr, so kann *begründetermaßen* von den Prämissen auf die Konklusion geschlossen werden (d. h. sie ist nicht nur vernünftig/rational, sondern begründbar);
  - die bloße Gültigkeit eines Arguments garantiert noch nicht seine Begründetheit, denn es gibt auch gültige Argumente mit falschen Prämissen, ebenso wie es nicht-gültige Argumente mit wahren Prämissen und wahrer Konklusion gibt (s. Beispiele unten).

Schlüsse/Argumente

- Das Argumentationsschema kann durch die Subjunktion P → Q erfasst werden, die die Eigenschaften eines logischen Schlusses/Arguments bereits in sich trägt:

Wahrheitswerte				Schlüssigkeit eines Arguments	
Prä-mis-se(n) P	→	Kon-klu-sion Q	Sub-junk-tion P → Q	Ein Argument ist schlüssig, wenn • die Subjunktion wahr ist sowie • die Prämissen und die Konklusion wahr sind. Dann *implizieren* die Prämissen die Konklusion.	
w	→	w	w	✓	Prämissen w, Konklusion w, Subjunktion w
w	→	f	f	×	Prämissen w, Konklusion f, Subjunktion f
f	→	w	w	(✓)	Prämissen f, Konklusion w, Subjunktion w
f	→	f	w	(✓)	Prämissen f, Konklusion f, Subjunktion w

Schlüsse/Argumente

- Zwischen P und Q besteht dann eine *Implikations-beziehung*:
  - Die Implikation wird im Gegensatz zur Subjunktion '→' durch einen doppeltgestrichenen Pfeil '⇒' ausgedrückt (Achtung: Unterschied zum Doppelpfeil '↔'!);
  - die Implikation wird dabei gewissermaßen als 'Spezialfall' der Subjunktion verstanden, wo $P \rightarrow Q$ wahr wird: $P \Rightarrow Q$ dann, wenn $P \rightarrow Q = w$ (was in drei von vier Fällen der Subjunktion vorliegt, s. Tabelle oben).
  - Implikation bedeutet in etwa (Schluss-)Folgerung aus vorausgesetzten Aussagen (Prämissen), die eine Aussage 'nach sich ziehen' oder zur Folge haben (Konklusion).

Schlüsse/Argumente

- Die drei Fälle können dann nochmals unterschieden werden, wodurch gültige von schlüssigen Argumenten getrennt werden können:
  - *schlüssiges Argument* (erste Zeile in obiger Tabelle):
    - w → w (P = w, Q = w, P → Q = w);
    - d. h. die Konklusion ergibt sich (notwendigerweise) *aufgrund* der Prämissen (begründeter Zusammenhang zwischen P und Q).
  - *gültiges Argument* (dritte und vierte Zeile in obiger Tabelle):
    - f → w (P = f, Q = w, P → Q = w) bzw.
      f → f (P = f, Q = f, P → Q = w);
    - d. h. die Konklusion ergibt sich gerade *nicht aufgrund* der Prämissen, sondern ist nur kontingenterweise (zufälligerweise, unbegründeterweise, nicht-notwendigerweise) falsch oder wahr.

Schlüsse/Argumente

- Hat man mehrere Prämissenaussagen (wie oben P_1 und P_2), so werden diese *per Konjunktion* zu *einer* Gesamtprämisse P verknüpft, die nur wahr wird, wenn alle Einzelaussagen wahr sind:
  - P ist dann eine komplexe Prämissenaussage, die aus mehreren Einzelprämissen besteht, die jeweils durch eine Konjunktion verbunden werden müssen, d. h. $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots$;
  - jede Einzelprämisse P_1, P_2, P_3 usw. kann ihrerseits wieder aus einzelnen Aussagen A, B usw. durch beliebige Junktionen oder Operatoren zusammengesetzt sein (s. Beispiel unten);
  - wenn alle P_1, P_2, P_3 usw. jeweils für sich wahr sind, ist auch die Gesamtprämisse $P = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots$ wahr, die dann wie eine einzige Prämisse P verwendet werden kann (s. Beispiel unten).

Schlüsse/Argumente

- Formalisiertes Beispiel von oben:
  - Prämissen:
    - An den Prämissen beteiligte Aussage(n) (oben farbig markiert):
      A = "1+1 = 2", ¬A = "1+1 ≠ 2";
    - Prämissenaussagen selbst: $P_1 = A \oplus \neg A$, $P_2 = \neg\neg A$.
      P_1 = "Entweder ist 1+1 = 2 oder 1+1 ≠ 2."
      P_2 = "Es ist nicht der Fall, dass 1+1 ≠ 2 ist."
  - Konklusion:
    - An der Konklusion beteiligte Aussagen (hier nur eine):
      A = "1+1 = 2";
    - Konklusionsaussage selbst (hier identisch mit A): Q = A.
      Q = "1+1 = 2".

Schlüsse/Argumente

- Das obige Argumentationsschema ist allgemeingültig insofern, als für A *jeder* Aussagesatz eingesetzt werden kann, ohne dass der Schluss dadurch ungültig würde:
  - Das Schema abstrahiert damit letztlich vom tatsächlichen Inhalt der Aussagesätze und fordert nur, dass die Aussagen eindeutig als wahr oder falsch beurteilt werden können;
  - die Allgemeingültigkeit resultiert aus der rein formalen Struktur des Arguments, die auf der jeweils konkreten Verknüpfung der Aussagen durch bestimmte Junktionen und/oder Negationen in Prämisse(n) bzw. Konklusion beruht;
  - auch das Verhältnis von Prämisse(n) und Konklusion selbst ist rein formal, da letztlich nur das Zusammenspiel von deren Wahrheitswerten von Interesse ist (aus Wahrem folgt Wahres).

Schlüsse/Argumente

- Da ein Schluss nur gültig ist, wenn $P \rightarrow Q$ wahr ist (d. h. $P \Rightarrow Q$ gilt), muss das Schlussschema als Tautologie (immerwahre Aussage) betrachtet werden:
  - Egal, aus wie vielen und welchen Aussagen A, B usw. die Prämisse P und die Konklusion Q konkret bestehen, ist das Argument nur gültig, wenn $P \rightarrow Q = w$ gilt (s. Tabelle oben).
  - zusätzlich ist das Argument auch schlüssig, wenn $P = w$, $Q = w$ sowie $P \rightarrow Q = w$ gilt.

Schlüsse/Argumente

Ob ein Schlussschema (Argument) seiner Form nach gültig ist, lässt sich damit rechnerisch nachprüfen, indem es auf eine Tautologie getestet wird:

- Hierzu muss unabhängig von den konkreten Wahrheitswerten der an den Prämissen und Konklusionen beteiligten Variablen A usw. die Aussage $[(A \oplus \neg A) \wedge (\neg\neg A)] \rightarrow A$ stets wahr sein, die das Argument $P \Rightarrow Q$ aussagenlogisch repräsentiert:
  - $P = P_1 \wedge P_2 = (A \oplus \neg A) \wedge (\neg\neg A) = [(A \oplus \neg A) \wedge (\neg\neg A)]$;
    (die Klammern dienen hierbei nur zur Verdeutlichung der Einzelaussagen bzw. zur Vorrangregelung wie in der Mathematik, d. h. welche Variablen werden zuerst verrechnet);
  - $Q = A$.

Schlüsse/Argumente

- Die Überprüfung der Gültigkeit des Schlusses (Test auf Tautologie) kann per Tabelle erfolgen, indem man für jeden Wahrheitswert von jeder der beteiligten Aussagen (hier nur A mit zwei Kombinationen) schrittweise die komplexen Aussagen berechnet:

A	A ⊕ ¬A	¬¬A	(A ⊕ ¬A) ∧ (¬¬A)	((A ⊕ ¬A) ∧ (¬¬A)) → A
w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
f	w	f	w ∧ f = f	f → f = w

Da die Gesamtaussage, die den logisch gültigen Schluss repräsentiert, unabhängig vom konkreten Wahrheitswert von A immer wahr ist, ist der Schluss gültig.

Schlüsse/Argumente

- Im Folgenden werden einige 'berühmte' Argumente mit jeweils einem alltagssprachlichen Beispiel vorgestellt und deren Gültigkeit per Tabelle belegt (Nachweis, dass es sich dabei jeweils um eine Tautologie handelt):
  - 'Modus tollendo ponens';
  - 'Modus ponendo tollens';
  - 'Modus ponendo ponens' (bzw. 'Modus ponens');
  - 'Modus tollendo tollens' (bzw. 'Modus tollens');
  - 'Modus barbara'.

Schlüsse/Argumente

- *Modus tollendo ponens*:
  - $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$.
  - Nachweis:

A	B	A ∨ B	¬A	(A ∨ B) ∧ ¬A	(A ∨ B) ∧ ¬A → B
w	w	w	f	w ∧ f = f	f → w = w
w	f	w	f	w ∧ f = f	f → f = w
f	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
f	f	f	w	f ∧ w = f	f → f = w

Unabhängig von den Werten von A und B resultiert immer w als Gesamtergebnis für $(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B$ ('→' wird zu '⇒').

Schlüsse/Argumente

- Alltagssprachliches Beispiel:
  - Aussagen:

    A = "Max ist in der Arbeit.";

    B = "Max ist zu Hause.".
  - Argument $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$:

    P_1: "Max ist in der Arbeit oder zu Hause." $(A \vee B)$

    P_2: "Max ist nicht in der Arbeit." $(\neg A)$

    Q: "Max ist zu Hause." (B)

Schlüsse/Argumente

- *Modus ponendo tollens*:
  - $\neg(A \wedge B) \wedge A \Rightarrow \neg B$.
  - Nachweis:

A	B	$\neg(A \wedge B)$	A	$\neg(A \wedge B) \wedge A$	$\neg(A \wedge B) \wedge A \to \neg B$
w	w	¬(w ∧ w) = f	w	f ∧ w = f	f → f = w
w	f	¬(w ∧ f) = w	w	w ∧ w = w	w → w = w
f	w	¬(f ∧ w) = w	f	w ∧ f = f	f → f = w
f	f	¬(f ∧ f) = w	f	w ∧ f = f	f → w = w

Unabhängig von den Werten von A und B resultiert immer w als Gesamtergebnis für $\neg(A \wedge B) \wedge A \to \neg B$ ('→' wird zu '⇒').

Schlüsse/Argumente

- Alltagssprachliches Beispiel:
  - Aussagen:

    A = "Max mag Mia.";

    B = "Max mag Maja.".
  - Argument $\neg(A \wedge B) \wedge A \Rightarrow \neg B$:

    P_1: "Es ist nicht der Fall, dass Max zugleich Mia und Maja mag." $(\neg(A \wedge B))$

    P_2: "Max mag Mia." (A)

    Q: "Max mag Maja nicht." $(\neg B)$

Schlüsse/Argumente

- *Modus ponendo ponens* (*Modus ponens*):
  - $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B.$
  - Nachweis:

A	B	A → B	A	(A → B) ∧ A	(A → B) ∧ A → B
w	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
w	f	f	w	f ∧ w = f	f → f = w
f	w	w	f	w ∧ f = f	f → w = w
f	f	w	f	w ∧ f = f	f → f = w

Unabhängig von den Werten von A und B resultiert immer w als Gesamtergebnis für $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ ('→' wird zu '⇒').

Schlüsse/Argumente

- Alltagssprachliches Beispiel:
  - Aussagen:

    A = "Mia arbeitet.";

    B = "Mia verdient Geld.".
  - Argument $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$:

    P_1: "Wenn Mia arbeitet, verdient sie Geld." $(A \rightarrow B)$

    P_2: "Mia arbeitet." (A)

    Q: "Mia verdient Geld." (B)

Schlüsse/Argumente

- *Modus tollendo tollens* (*Modus tollens*):
  - (A → B) ∧ ¬B ⇒ ¬A.
  - Nachweis:

A	B	A → B	¬B	(A → B) ∧ ¬B	(A → B) ∧ ¬B → ¬A
w	w	w	f	w ∧ f = f	f → f = w
w	f	f	w	f ∧ w = f	f → f = w
f	w	w	f	w ∧ f = f	f → w = w
f	f	w	w	w ∧ w = w	w → w = w

Unabhängig von den Werten von A und B resultiert immer w als Gesamtergebnis für (A → B) ∧ ¬B → ¬A ('→' wird zu '⇒').

Schlüsse/Argumente

- Alltagssprachliches Beispiel:
  - Aussagen:

    A = "Mia arbeitet.";

    B = "Mia verdient Geld.".
  - Argument $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$:

    P_1: "Wenn Mia arbeitet, verdient sie Geld." $(A \rightarrow B)$

    P_2: "Mia verdient kein Geld." $(\neg B)$

    Q: "Mia arbeitet nicht." $(\neg A)$

Schlüsse/Argumente

- *Modus barbara:*
  - $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$.
  - Nachweis:

A	B	C	A → B	B → C	(A → B) ∧ (B → C)	(A → B) ∧ (B → C) → (A → C)
w	w	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
w	w	f	w	f	w ∧ f = f	f → f = w
w	f	w	f	w	f ∧ w = f	f → w = w
w	f	f	f	w	f ∧ w = f	f → f = w
f	w	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
f	w	f	w	f	w ∧ f = f	f → w = w
f	f	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
f	f	f	w	w	w ∧ w = w	w → w = w

Unabhängig von den Werten von A, B und C resultiert immer w als Gesamtergebnis für (A → B) ∧ (B → C) → (A → C) ('→' wird zu '⇒').

Schlüsse/Argumente

- Alltagssprachliches Beispiel:
  - Aussagen:

    A = "Max arbeitet.";

    B = "Max verdient Geld.";

    C = "Max ist glücklich.";
  - Argument $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$:

    P_1: "Wenn Max arbeitet, verdient er Geld." $(A \rightarrow B)$

    P_2: "Wenn Max Geld verdient, ist er glücklich." $(B \rightarrow C)$

    Q: "Wenn Max arbeitet, ist er glücklich." $(A \rightarrow C)$

Schlüsse/Argumente

- Inhaltliche Merkwürdigkeiten entstehen oftmals dadurch, dass auch Argumente mit falschen Prämissen und Konklusionen gültige (wenn auch nicht schlüssige) Argumente darstellen:
  - Setzt man für obigen Modus barbara bspw. die folgenden drei falschen Aussagen ein, ist der Schluss formal immer noch gültig, da aus Falschem ja Beliebiges folgt:

    A = "Beckenbauer ist der Kaiser von China." (f);

    B = "Der Kaiser von China lebt in Schanghai." (f);

    C = "Schanghai ist die Hauptstadt von Europa." (f).

Schlüsse/Argumente

- Der Schluss $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ vollzieht sich dann wie folgt:

P_1:	"Wenn Beckenbauer der Kaiser von China ist, lebt der Kaiser von China in Schanghai."	$(A \rightarrow B)$
P_2:	"Wenn der Kaiser von China in Schanghai lebt, ist Schanghai die Hauptstadt von Europa."	$(B \rightarrow C)$
Q:	"Wenn Beckenbauer der Kaiser von China ist, ist Schanghai die Hauptstadt von Europa."	$(A \rightarrow C)$

Hier erkennt man, dass *Wahrheit von Aussagen* und *Gültigkeit von Argumenten* zwei völlig verschiedene Dinge sind!

Schlüsse/Argumente

- Davon zu unterscheiden sind *ungültige* Argumente, die dennoch (hier vorausgesetztermaßen) wahre Prämissen und Konklusionen haben können:
  - Alltagssprachliches Beispiel:
    - Aussagen:

      A = "Mia arbeitet." (soll hier der Fall sein);

      B = "Mia verdient Geld." (soll hier der Fall sein).
    - Argument $(A \rightarrow B) \wedge B \Rightarrow A$:

      P_1: "Wenn Mia arbeitet, verdient sie Geld." $(A \rightarrow B)$

      P_2: "Mia verdient Geld." (B)

      Q: "Mia arbeitet." (A)

Schlüsse/Argumente

- Nachweis der Ungültigkeit:

A	B	A → B	B	(A → B) ∧ B	(A → B) ∧ B → A
w	w	w	w	w ∧ w = w	w → w = w
w	f	f	f	f ∧ f = f	f → w = w
f	w	w	w	w ∧ w = w	w → f = f
f	f	w	f	w ∧ f = f	f → f = w

Unabhängig von den Werten von A und B resultiert *nicht* immer w als Gesamtergebnis für (A → B) ∧ B → A.

Das Argument stimmt gewissermaßen nur in drei von vier Fällen, da in der dritten Zeile ganz rechts ein f auftritt.

Das Argument ist ein klassischer alltäglicher Fehlschluss!

Übung — Vertiefung

- Weisen Sie per Überlegung oder Wertetabelle nach, dass folgende Argumente gültig sind:
  - $A \Rightarrow A \vee B$;
  - $A \wedge B \Rightarrow A$;
  - $A \leftrightarrow B \Rightarrow A \rightarrow B$.
- Prüfen Sie anhand einer Wertetabelle mit zwei bzw. drei Variablen, ob die folgenden beiden Argumente gültig sind oder nicht:
  - $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Rightarrow / \not\Rightarrow \neg A$;
  - $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow / \not\Rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

Gesetze

- Die Implikation '⇒' wird alltagssprachlich als 'folglich' oder 'also' ausgedrückt, wobei die Implikation auf die (wahre) Subjunktion zurückgeführt wird.
- Die Bi(sub)junktion '↔' als doppelte Subjunktion '→' besitzt ebenfalls eine alltagssprachliche Interpretation im Sinne der *Äquivalenz* oder Gleichheit zweier Aussagen:
  - Zur Wiederholung: Es gilt $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;
  - betrachtet man wiederum nur die wahre Bisubjunktion, dann ist sie genau dann wahr, wenn A und B *gleiche* Wahrheitswerte besitzen, und falsch, wenn sie unterschiedliche Wahrheitswerte aufweisen.

Gesetze

- Analog zur Implikation wird Äquivalenz zweier beliebiger Aussagen P und Q als wahre Bisubjunktion P ⇔ Q betrachtet (bei falscher Bisubjunktion würde hingegen *Ungleichheit* der Wahrheitswerte vorliegen):

Wahrheitswerte				Gleichheit zweier Aussagen	
P	↔	Q	Bi(sub)-junktion P ↔ Q	Äquivalenz liegt vor, wenn • die Bisubjunktion wahr ist sowie • die beiden Aussagen paarweise w/f sind.	
w	↔	w	w	✓	Gleichheit (Äquivalenz) von P und Q
w	↔	f	f	×	Ungleichheit von P und Q
f	↔	w	f	×	Ungleichheit von P und Q
f	↔	f	w	✓	Gleichheit (Äquivalenz) von P und Q

Gesetze

- Äquivalenz P ⇔ Q kann gegenüber der Implikation P ⇒ Q in gewissem Sinne als *stärkere* Gesamtaussage betrachtet werden, da es sich um eine *doppelte* Implikation handelt:

Wahrheitswerte		P ⇔ Q	P ⇒ Q	Q ⇒ P	(P ⇒ Q) ∧ (Q ⇒ P)
P	Q				
w	w	w	w	w	w ∧ w = w
w	f	–	–	w	–
f	w	–	w	–	–
f	f	w	w	w	w ∧ w = w

- Der Nutzen der Äquivalenz für die Logik/Mathematik besteht darin, Gesetze zu formulieren (s. unten), die bspw. zur Vereinfachung von Aussagen dienen können.

Gesetze

- Die Gesetze sind allesamt als Äquivalenzen formuliert:
  - Die beiden Aussagen links und rechts der Äquivalenz '⇔' besitzen unter allen möglichen Wahrheitswert-Kombinationen der Einzelaussagen A, B und C den Gesamt-Wahrheitswert wahr (d. h. es handelt sich bei Gesetzen im Speziellen um Tautologien);
  - insgesamt werden zehn Gesetze angeführt, die maximal drei Einzelaussagen A, B und C verknüpfen;
  - einige Gesetze finden sich analog auch in der Mengenlehre und Arithmetik wieder, wobei '∧' analog '•' und '∨' analog '+' funktioniert.
- Die Gesetze im Einzelnen:

Gesetze

- *Kommutativgesetze* (Vertauschung):
  - $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$;
  - $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
- *Assoziativgesetze* (Verkettung):
  - $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$;
  - $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$.
- *Distributivgesetze* (Verteilung):
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Gesetze

- *Absorptionsgesetze* ('Verschluckung'):
  - $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$;
  - $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$.
- *Idempotenzgesetze*:
  - $A \wedge A \Leftrightarrow A$;
  - $A \vee A \Leftrightarrow A$.
- *Identitätsgesetze*:
  - $A \wedge w \Leftrightarrow A$;
  - $A \vee f \Leftrightarrow A$.

Gesetze

- *DeMorgan-Gesetze*:
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$; (Negatkonjunktion)
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$. (Negatdisjunktion)
- *Komplementgesetze*:
  - $A \wedge \neg A \Leftrightarrow f$ (Kontradiktion);
  - $A \vee \neg A \Leftrightarrow w$ (Tautologie).
- *Dominanzgesetze*:
  - $A \wedge f \Leftrightarrow f$ (Kontradiktion);
  - $A \vee w \Leftrightarrow w$ (Tautologie).

Gesetze

- *Negationsgesetze*:
  - $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$;
  - $\neg f \Leftrightarrow w$, $\neg w \Leftrightarrow f$.

Dualitätsprinzip der Gesetze:

- Vertauscht man in einem Gesetz die Junktoren '$\wedge$' und '$\vee$' sowie die Wahrheitswerte 'w' und 'f' miteinander, so erhält man wieder ein Gesetz;
- d. h. es gibt immer zwei paarweise zusammengehörige Gesetze, die bezüglich '$\wedge$' und '$\vee$' sowie 'w' und 'f' invers zueinander sind.

Übung — Vertiefung

- Weisen Sie per Überlegung oder Wertetabelle nach, dass folgende Äquivalenzen (Gesetze) gelten:
  - $A \wedge A \Leftrightarrow A$ bzw. $A \vee A \Leftrightarrow A$;
  - $A \rightarrow \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$;
  - $(A \leftrightarrow \neg B) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.
- Prüfen Sie per Wertetabelle nach, ob die folgenden Äquivalenzen gelten:
  - $(A \wedge B) \Leftrightarrow / \not\Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$;
  - $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow / \not\Leftrightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$;
  - $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Leftrightarrow / \not\Leftrightarrow (A \leftrightarrow C)$.

Anwendungen

- Die Vorteile einer logisch-semantischen Repräsentation von Aussagen sind vielfältig:
  - Die Logik besitzt lange etablierte Verfahren zur Darstellung und Berechnung von Wahrheitswerten, die bestimmte Aspekte der Bedeutung natürlich-sprachlicher Aussagen erfassen;
  - die Bedeutung komplexer Aussagen im Hinblick auf den Wahrheits-wert einer Gesamtaussage kann objektiv erfasst werden und hängt nicht von der subjektiven Einschätzung eines Sprechers/Hörers ab;
  - die Aussagenlogik stellt zudem ein universelles, einzelsprach-unabhängiges Verfahren zur Verfügung, Aussagen zu formalisieren;
  - ferner erlaubt es der logische Ansatz, die Bedeutung von Aussagen mit Sachverhalten der Welt zu verbinden und so die Beziehung von Sätzen und Dingen der Welt zu bestimmen (Referenz).

Anwendungen

- Anwendungen der Aussagenlogik in der Linguistik finden sich vor allem in der (kognitiven) Semantik:
  - Aufgrund der Einzelsprachunabhängigkeit können damit auch allgemeine Denkschemata wie z. B. Argumente (Schlüsse) dargestellt werden (s. oben);
  - zudem ermöglicht die aussagenlogische Formalisierung auch die Erfassung semantischer Phänomene wie *Paraphrase* (Satz-synonymie), *Sub-/Superordination* (Satzhyponymie/-hyperonymie) sowie *Entailment* und *Präsupposition* (s. Def. unten);
  - und schließlich lassen sich auch noch sprachlich formulierte 'Rätsel' (Textaufgaben) aussagenlogisch kodieren und lösen (s. Beispiel unten).

Anwendungen

- Paraphrasie (Satzsynonymie):
  - Paraphrasie meint die *Gleichbedeutung* von (Aussage-) Sätzen im Hinblick auf den Wahrheitswert, die durch die Bisubjunktion '↔' dargestellt werden kann;
  - ist die Bisubjunktion wahr, liegt Äquivalenz '⇔' vor, d. h. Gleichheit im Hinblick auf den Wahrheitswert zweier Aussagen A und B (A ⇔ B):
    - Sind A und B unter denselben Bedingungen beide wahr oder beide falsch, so sind sie bedeutungsgleich im Hinblick auf den Wahrheitsaspekt der Bedeutung;
    - über die genauen Prozeduren zur Feststellung der Wahrheit einer Aussage gegenüber der Realität ist damit nichts gesagt.

Anwendungen

- Da die Bisubjunktion auch als doppelte Subjunktion umschrieben werden kann, gilt für die Äquivalenz auch die Umschreibung durch die Implikation:
  - $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ (entspricht $A \Leftrightarrow B$);
  - zwei Aussagen sind also gleich, wenn zugleich $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$ der Fall ist, d. h. wenn A B impliziert und B A.
- Beispiele:
  - A = "Max hat ein Buch." (w) $\Leftrightarrow$ B = "Das Buch gehört Max." (w):
    - 'Wenn Max ein Buch hat, dann gehört es Max' *und*
    - 'Wenn Max das Buch gehört, dann hat es Max';
  - A = "Max besitzt ein Buch." (w) $\Leftrightarrow$ B = "Das Buch wird von Max besessen." (w).

Anwendungen

- Umgekehrt bietet die falsche Bisubjunktion ($A \leftrightarrow B = f$ bzw. $A \not\Leftrightarrow B$) eine Möglichkeit, die Bedeutungs*ungleichheit* von A und B auszudrücken:
  - Im einen Fall wird nur die Ungleichheit der Wahrheitswerte von A und B festgestellt, so dass A und B in jedem Fall verschiedene Bedeutungen aufweisen, da sie nicht synonym sein können:
    - Ungleichheit: $\neg(A \Leftrightarrow B)$;
    - A = "Max hat das Buch X." (w) $\not\Leftrightarrow$ B = "Mia hat das*selbe* Buch X." (f).
  - Im anderen Fall folgt aus der Verneinung der Aussage A automatisch die Bejahung der Aussage B und umgekehrt, was als *binäre (Satz-)Antonymie* bezeichnet wird:
    - binäre Antonymie: $(A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$;
    - A = "Das Licht ist an." $\not\Leftrightarrow$ B = "Das Licht ist aus.".

Anwendungen

- Superordination (Satzhyperonymie):
  - Superordination meint die *Bedeutungsüberordnung* eines Aussagesatzes gegenüber einem anderen, was durch die Subjunktion '→' wiedergegeben werden kann;
  - ist die Subjunktion wahr, liegt eine Implikation '⇒' vor, die zwar Bedeutungs*un*gleichheit zweier Aussagen A und B ausdrückt, zumindest jedoch impliziert A B:
    - In allen Situationen, in denen eine bedeutungstechnisch speziellere Aussage A wahr ist, ist auch die generellere Aussage B wahr, *aber nicht umgekehrt* (im Gegensatz zur Paraphrasie);
    - d. h. A impliziert die Bedeutung von B, aber B impliziert nicht die Bedeutung von A.

Anwendungen

- Der Bedeutungszusammenhang zwischen A und B kann entsprechend wie folgt formalisiert werden:
  - $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(B \Rightarrow A)$;
  - eine Aussage A impliziert eine Aussage B, aber es ist nicht der Fall, dass auch B A impliziert; d. h. wenn A wahr ist, ist auch B wahr, aber nicht umgekehrt.
- Beispiele:
  - A = "Max besitzt »Der Name der Rose«." (w) ⇒ B = "Max besitzt ein Buch." (w):
    - 'Wenn Max »Der Name der Rose« besitzt, dann besitzt Max auch ein Buch';
    - 'Wenn Max ein Buch besitzt, besitzt er aber nicht notwendigerweise »Der Name der Rose«'.
  - A = "Max hat Zahnweh." (w) ⇒ B = "Max hat Schmerzen." (w).

Anwendungen

- Entailment:
  - Entailment meint ähnlich der Implikation eine Art *Enthaltenseins- oder Folgebeziehung zwischen den Bedeutungen* zweier Aussagen, jedoch unter anderen Bedingungen (wofür in der Logik kein etabliertes Zeichen zur Verfügung steht und wir einfach '⇛' verwenden wollen);
  - auch durch Entailment wird zunächst nur eine Bedeutungs*un*gleichheit ausgedrückt, jedoch stehen die Bedeutungen der Aussagen A und B dennoch im besonderen Zusammenhang des Entailments ('Nach-sich-Ziehen'):
    - In allen Situationen, in denen A wahr ist, ist auch B wahr; und in allen Situationen, in denen B nicht wahr (f) ist, ist auch A nicht wahr (f);
    - d. h. A impliziert B und die Negation von B impliziert die Negation von A.

Anwendungen

- Der Bedeutungszusammenhang zwischen A und B lässt sich wie folgt durch die Implikation umschreiben (man beachte den Unterschied zur Superordination!):
  - $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$;
  - eine Aussage A impliziert eine Aussage B, aber wenn B nicht gilt (falsch ist), impliziert dies auch, dass A nicht gilt (falsch ist).
- Beispiele:
  - A = "Max tötet eine Mücke." (w) ⇛ B = "Die Mücke ist tot." (w):
    - 'Wenn Max eine Mücke *tötet*, dann ist die Mücke auch *tot*.';
    - 'Wenn die Mücke nicht tot ist, kann Max die Mücke auch nicht getötet haben.'.
  - A = "Max träumt." (w) ⇛ B = "Max schläft." (w).

Anwendungen

- Präsupposition:
  - Präsupposition definiert ähnlich dem Entailment ebenfalls eine Art *Enthaltenseins-Beziehung zwischen den Bedeutungen* zweier Aussagen, jedoch ist die eine Aussage unabhängig vom Wahrheitswert der anderen in jedem Fall enthalten (als Zeichen verwenden wir hier das nicht-etablierte '↠');
  - in gewissem Sinne ist die Bedeutung einer Aussage B dabei Teil(aspekt) der Bedeutung einer Aussage A, ohne dass zugleich Superordination zwischen A und B besteht:
    - In allen Situationen, in denen A *wahr oder falsch* ist, ist B in jedem Fall wahr;
    - d. h. B ist immer wahr, da es einen bestimmten Teil der Bedeutung von A bildet, der nicht vom Wahrheitswert von A abhängt.

Anwendungen

- Der Zusammenhang zwischen den Bedeutungen von A und B lässt sich unter diesen Gegebenheiten wie folgt wiederum durch die Implikation darstellen:
  - $(A \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow B)$ bzw. gleichbedeutend $(A \lor \neg A) \Rightarrow B$;
  - eine Aussage A impliziert eine Aussage B, zugleich aber impliziert auch die Negation von A wiederum B.
- Beispiele:
  - A = "Mias Mann ist Lehrer." (w) ↠ B = "Mia hat einen Mann." (w):
    - 'Wenn Mias Mann Lehrer ist, hat Mia einen Mann.';
    - 'Wenn Mias Mann kein Lehrer ist, hat Mia trotzdem einen Mann.'.
  - A = "Max kennt den Politiker Obama." (w) ↠ B_1 = "Es gibt einen Obama." (w) bzw. B_2 = "Obama ist Politiker." (w).

Anwendungen

- Durch die aussagenlogische Formalisierung gelingt nicht nur die Übersetzung alltagssprachlicher Aussagesätze in eine formale Darstellung, sondern die erstellten Aussagen können auch noch anhand ihrer Wahrheitswerte mit Hilfe von Wertetabellen berechnet (aufgelöst) werden:
  - Folgende drei Aussagen seien gegeben:
    - A = "Anton wird zur Party eingeladen.";
    - B = "Berta wird zur Party eingeladen.";
    - C = "Chris wird zur Party eingeladen.".

Anwendungen

- Damit kann bspw. folgende Rätselaufgabe formuliert und gelöst werden:
  - Ermitteln Sie, wer zur Party eingeladen wird, wenn folgende Bedingungen alle gleichzeitig gelten sollen:
    1) "Wenn Chris nicht eingeladen wird, dann wird Anton eingeladen.";
    2) "Wenn Berta eingeladen wird, dann auch Anton und Chris.";
    3) "Anton und Berta oder Berta und Chris werden eingeladen.".

    Wer wird denn nun tatsächlich eingeladen?
  - Die Lösung lässt sich finden, indem eine Gesamtaussage konstruiert wird, um dann zu berechnen, in welcher Konstellation von Wahrheitswerten für die Aussagen A, B und C welches Ergebnis resultiert.

Anwendungen

- Die Lösung erfolgt dann in zwei Schritten:
  - Zunächst müssen die drei Bedingungen 1), 2) und 3) als komplexe Aussagen formuliert werden:
    1) $\neg C \rightarrow A$;
    2) $B \rightarrow (A \wedge C)$;
    3) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C)$.
  - Danach sind alle drei Aussagen zu konjungieren, da sie ja alle *zugleich* der Fall sein sollen:

    $\{\neg C \rightarrow A\} \wedge \{B \rightarrow (A \wedge C)\} \wedge \{(A \wedge B) \vee (B \wedge C)\}$.

    (Die geschweiften Klammern dienen nur zur Hervorhebung der drei ursprünglichen Einzelaussagen 1) bis 3).)

Anwendungen

* Schließlich ist nachzuprüfen, in welcher Wahrheitswerte-Kombination von A, B und C die Gesamtaussage {¬C → A} ∧ {B → (A ∧ C)} ∧ {(A ∧ B) ∨ (B ∧ C)} wahr wird:

A	B	C	{¬C → A} = X	{B → (A ∧ C)} = Y	{(A ∧ B) ∨ (B ∧ C)} = Z	X ∧ Y ∧ Z = V
w	w	w	¬w → w = w	w → (w ∧ w) = w	(w ∧ w) ∨ (w ∧ w) = w	w
w	w	f	¬f → w = w	w → (w ∧ f) = f	(w ∧ w) ∨ (w ∧ f) = w	f
w	f	w	¬w → w = w	f → (w ∧ w) = w	(w ∧ f) ∨ (f ∧ w) = f	f
w	f	f	¬f → w = w	f → (w ∧ f) = w	(w ∧ f) ∨ (f ∧ f) = f	f
f	w	w	¬w → f = w	w → (f ∧ w) = f	(f ∧ w) ∨ (w ∧ w) = w	f
f	w	f	¬f → f = f	w → (f ∧ f) = f	(f ∧ w) ∨ (w ∧ f) = f	f
f	f	w	¬w → f = w	f → (f ∧ w) = w	(f ∧ f) ∨ (f ∧ w) = f	f
f	f	f	¬f → f = f	f → (f ∧ f) = w	(f ∧ f) ∨ (f ∧ f) = f	f

Anwendungen

- Interpretation des Ergebnisses V:
  - Es gibt offenbar genau *eine* Konstellation von Wahrheitswerten für die Aussagen A, B und C, die als Ergebnis eine wahre Gesamtaussage liefert (erste Zeile);
  - nur wenn alle drei Personen zur Party eingeladen werden, d. h. die Aussagen A, B und C ihrerseits wahr sind, können alle gestellten Bedingungen 1) bis 3) erfüllt werden;
  - durch alltagssprachliche Überlegungen wäre man kaum in der Lage gewesen, eine Konstellation für die Einladungen zu finden, die die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt bzw. diesen nicht direkt widerspricht.

Übung — Diskussion

- Überlegen Sie, welches semantische Phänomen jeweils zwischen folgenden Sätzen vorliegt (von links nach rechts):
  - "Lassie bellt." — "Der Collie bellt." — "Der Hund bellt." — "Das Tier bellt.";
  - "Max spricht." — "Max erzeugt Laute." — "Max erzeugt Schall-wellen." — "Max verwirbelt die Luft.";
  - "Max sieht Mia." — "Mia wird von Max gesehen." — "Max erblickt Mia." — "Mia wird von Max erblickt.";
  - "Max Freundin Mia, eine Schwester von Maja, mag Moritz nicht." — "Max und Mia sind ein Paar." — "Mia und Maja sind Geschwister." — "Mia kennt Moritz.";
  - "Max ist volljährig." — "Max ist minderjährig." — "Max ist nicht volljährig.".

Literatur

- Beckermann, A. ([2]2003): *Einführung in die Logik*. Berlin und New York: Walter de Gruyter.
- Grewendorf, G. & Hamm, F. & Sternefeld, W. ([4]1990): *Sprachliches Wissen*. Frankfurt/Main: Suhrkamp.
- Heringer, H. J. (1972): *Formale Logik und Grammatik*. Tübingen: Niemeyer.
- Kutschera, F. von & Breitkopf, A. ([6]1992): *Einführung in die moderne Logik*. Freiburg und München: Alber.
- Lohnstein, H. ([2]2011): *Formale Semantik und natürliche Sprache*. Berlin & New York: De Gruyter.
- Riemer, N. (2010): *Introducing Semantics*. Cambridge: University Press.
- Saeed, J. I. ([3]2009): *Semantics*. Malden und Oxford: Wiley-Blackwell.
- Schwarz, M. & Chur, J. ([5]2007): *Semantik*. Tübingen: Narr.