UNIVERITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 1
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe:13.5.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum. Zeigen Sie:

i) Für alle $v \in V \setminus U$ existiert genau ein $u_0 \in U : v - u_0 \in U^\perp$.
Hinweis: orthogonale Projektion.

ii) In der Situation von i) gilt für alle $u_0 \neq u \in U$: $|v - u| > |v - u_0|$, d.h. $u_0 \in U$ ist die "beste Approximation" an $v \in V \setminus U$.

Seien nun $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt,

$$U := \langle (1,2,1), (2,0,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

und $v := (1,0,0)$.

iii) Zeigen Sie $v \in V \setminus U$ und berechnen Sie $u_0 \in U$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine ONB von U.

Aufgabe 2. Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum, $U \subseteq V$ ein $\mathbb{R}$- (bzw. $\mathbb{C}$-)Untervektorraum und $\{e_1, \ldots, e_k\}$ eine ONB *von U*. Zeigen Sie, dass eine ONB der Form $\{e_1, \ldots, e_k, \ldots\}$ von V existiert.
Hinweis: Basisergänzungssatz und Gram-Schmidsches Orthogonalisierungsverfahren.

Aufgabe 3. Sei

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (*)\ 41x_1^2 - 24x_1x_2 + 34x_2^2 = 25\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

i) Sei $\begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (*) \Leftrightarrow x^t \cdot A \cdot x = 25$.

ii) Bestimmen Sie explizit eine orthogonale Matrix $S \in O(2)$ so, dass $D := S^t AS$ eine Diagonalmatrix ist (d.h. finden Sie eine ONB aus Eigenvektoren von A).

iii) Bestimmen Sie die Gleichung von $C \subseteq \mathbb{R}^2$ in den Koordinaten

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := S^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

und folgern Sie, dass C eine Ellipse mit Hauptachen der Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

Aufgabe 4. Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) φ ist normal.

ii) Es existiert ein Polynom $p \in \mathbb{C}[T]$ so, dass für die zu φ adjungierrte Abbildung gilt: $\varphi^* = p(\varphi)$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Hinweis: *ii)* $\Rightarrow$ *i)* folgt recht einfach aus der Definition von "normal", zum Beweis der Umkehrung zeigen Sie zunächst: Sind $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ die Eigenwerte von φ, so existiert $p \in \mathbb{C}[T]$ mit $p(\alpha_i) = \overline{\alpha}_i$ für alle i, und folgern dann mit dem Spektralsatz für normale Operatoren, dass p die Bedingung in *ii)* erfüllt.

Zusatzaufgabe. Seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$). Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt *Isometrie*, falls für alle $v \in V$ gilt: $|\varphi(v)| = |v|$.
Seien $v, w \in V$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Es existiert eine Isometrie φ mit $\varphi(v) = w$.

ii) Es gilt $|v| = |w|$.

UNIVERITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. N. Naumann

SS2011
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe:20.5.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien I eine Menge, und für alle $i \in I$ sei R_i ein Ring. Zeigen Sie:

i) Das kartesische Produkt $\Pi_{i\in I} R_i$ mit den in 2.3,v) der Vorlesung gegebenen Verknüpfungen ist ein Ring. (2 Punkte)

ii) Für alle $i_0 \in I$ ist die *Projektion*

$$\pi_{i_0} : \Pi_{i\in I} R_i \to R_{i_0}\,;\, \pi_{i_0}((x_i)_{i\in I}) := x_{i_0}$$

ein Ringhomomorphismus. (2 Punkte)

iii) *(universelle Eigenschaft)* Sind S ein Ring und für alle $i \in I$ $f_i : S \to R_i$ ein Ringhomomorphismus, so existiert genau ein Ringhomomorphismus $f : S \to \Pi_{i\in I} R_i$ mit $\forall i \in I : \pi_i \circ f = f_i$. (2 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen und die *Normabbildung* definiert durch

$$N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}\,;\, N(a + bi) := a^2 + b^2 = (a + bi)\overline{(a + bi)}.$$

Zeigen Sie:

i) $\forall x, y \in \mathbb{Z}[i] : N(xy) = N(x)N(y)$. (2 Punkte)

ii) $\forall x \in \mathbb{Z}[i] : x \in \mathbb{Z}[i]^* \Leftrightarrow N(x) = 1$. (2 Punkte)

iii) $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$. (2 Punkte)

Aufgabe 3. Sei M eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

i) Das Tupel $(End_{\mathbb{Z}}(M), +, \cdot, 0, 1)$ definiert in 3.3,i) der Vorlesung ist ein Ring. (3 Punkte)

ii) Sind R ein Ring und $\varphi : R \times M \to M$ eine Abbildung, so sind äquivalent:

   a) φ erfüllt Definition 3.1 der Vorlesung, d.h. φ ist eine R-Modulstruktur auf der abelschen Gruppe M.

   b) Die Abbildung

$$R \to End_{\mathbb{Z}}(M)\,,\; r \mapsto (m \mapsto \varphi(r, m))$$

   ist ein Ringhomomorphismus.

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Seien k ein Körper und $n \geq 2$. Zeigen Sie:

i) Die Matrizenmultiplikation

$$M_n(k) \times k^n \to k^n$$

definiert auf k^n eine $M_n(k)$-Modulstruktur und ist $U \subseteq k^n$ ein $M_n(k)$-Untermodul, so folgt $U = \{0\}$ oder $U = k^n$. (2 Punkte)

ii) Für *das Zentrum von* $M_n(k)$ gilt

$$Z(M_n(k)) := \{X \in M_n(k) \mid \forall Y \in M_n(k) : XY = YX\} = k \cdot 1_n.$$

(2 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq i, j \leq n$ die *Elementarmatrizen*

$$\epsilon_{i,j} := (\delta_{i,a} \cdot \delta_{j,b})_{1 \leq a,b \leq n} \in M_n(k)$$

und überlegen Sie, was für $A \in M_n(k)$ die Gleichung $\epsilon_{i,j} A = A \epsilon_{i,j}$ über die Einträge von A aussagt. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe. Wir definieren die folgenden komplexen (2×2)-Matrizen:

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbb{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbb{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

i) Zeigen Sie, dass $\{\mathbf{1}, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ $\mathbb{R}$-linear unabhängig ist. Insbesondere gilt für

$$\mathbb{H} := \langle \mathbf{1}, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K} \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq M_2(\mathbb{C}) :$$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ ein Unterring ist.
Hinweis: erstellen Sie die Multiplikationstafel für die $\mathbb{R}$-Basis aus Teil i).

iii) Zeigen Sie

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid z, w \in \mathbb{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C}).$$

iv) Für $x \in M_2(\mathbb{C})$ setze $x^* := \bar{x}^t$. Zeigen Sie: $x \in \mathbb{H} \Rightarrow x^* \in \mathbb{H}$ und $xx^* = det(x) \cdot \mathbf{1}, det(x) \in \mathbb{R}$ mit $det(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

v) Folgern Sie aus iv), dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist und zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ kein Körper ist. Man nennt $\mathbb{H}$ die *Hamiltonschen Quarternionen*.

UNIVERITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 3
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe:27.5.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1.

i) Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ existiert. (2 Punkte)

ii) Seien k ein Körper und $\varphi : \mathbb{Z} \to k$ der nach Teil i) eindeutig bestimmte Ringhomomorphismus. Nach Vorlesung gilt $ker(\varphi) = (m)$ für eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $m \geq 0$. Zeigen Sie: Es gilt $m = 0$ oder m ist eine Primzahl. (4 Punkte)

Aufgabe 2.

i) Seien R ein kommutativer Ring und $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeigen Sie, dass folgende Teilmengen von R Ideale sind:

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\} \subseteq R,$$

$$I \cap J := \{x \in R \mid x \in I \text{ und } x \in J\} \subseteq R \text{ und}$$

$$IJ := \{\sum_{k=1}^{n} x_i y_i \mid n \geq 0, x_i \in I, y_i \in J\} \subseteq R.$$

(3 Punkte)

ii) Seien $p, q \in \mathbb{Z}$ nicht notwendig verschiedene Primzahlen. Wegen Teil i) und Satz 2.8 der Vorlesung existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ so, dass gelten:

$$(p)+(q) = (x_1), (p)\cap(q) = (x_2), (p^2)+(pq) = (x_3) \text{ und } (p^2)\cap(pq) = (x_4).$$

Berechnen Sie die x_i explizit in Abhängigkeit von p und q.(3 Punkte)

Aufgabe 3. Seien k ein Körper, $n \geq 2$ und $R := M_n(k)$. Zeigen Sie:

i) R ist kein Schiefkörper. (2 Punkte)

ii) Jedes Ideal von R ist trivial. (4 Punkte)
Hinweis: Multiplizieren Sie ein $0 \neq x \in R$ von links und rechts mit den Elementarmatrizen $\epsilon_{i,j}$ aus Blatt 2, Aufgabe 4.

Aufgabe 4.

i) Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Zeigen Sie:

  a) Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent: $x \sim y$, $[x] = [y]$ und $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
  b) Zeigen Sie, dass X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist.

(3 Punkte)

ii) Entscheiden Sie, ob folgende Relationen auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ Äquivalenzrelationen sind und bestimmen Sie ggf. die zugehörigen Äquivalenzklassen:

  a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$.
  b) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \sim y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.

(3 Punkte)

Zusatzaufgabe. Seien X eine Menge,

$$\mathcal{P}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X \text{ Teilmenge}\}$$

die Potenzmenge von X,

$$\mathcal{D}(X) := \left\{ P \subseteq \mathcal{P}(X) \mid X = \bigcup_{p \in P} p \text{ (disjunkte Vereinigung) und } \forall p \in P : p \neq \emptyset \right\}$$

die Menge der Zerlegungen von X in disjunkte, nicht-leere Teilmengen und

$$\mathcal{A} := \big\{ R \subseteq X \times X \mid R \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } X \big\}$$

die Menge der Äquivalenzrelationen auf X. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathcal{A}(X) \to \mathcal{D}(X)\,,\; R \mapsto \{[x] := \{y \in X : (x,y) \in R\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

UNIVERSITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 4
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 3.6.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1.

i) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\{x \in R \,|\, \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\} \subseteq R$$

ein Ideal ist. Es heißt *das Nilradikal von R.* (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass man auf die Voraussetzung "kommutativ" in Teil i) nicht verzichten kann. (3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei R ein Ring.

i) Seien M, N R-Moduln und $f : M \to N$ eine R-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/ker(f) \arrow[r, dotted, "\bar{f}"] & im(f) \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

genau eine R-lineare Abbildung $\bar{f}$ so existiert, dass das Diagramm kommutiert, und dass $\bar{f}$ ein Isomorphismus ist (hierbei bezeichnet π die kanonische Abbildung in den Quotientenmodul und ι die Inklusionsabbildung des R-Untermoduls $im(f) \subseteq N$). (2 Punkte)

ii) Seien M ein R-Modul und $M', M'' \subseteq M$ R-Untermoduln. Zeigen Sie:

a) Die Teilmenge

$$M' + M'' := \{x' + x'' \,|\, x' \in M', x'' \in M''\} \subseteq M$$

ist der kleinste R-Untermodul von M, der sowohl M' als auch M'' enthält. (2 Punkte)

b) Die Inklusion $M' \hookrightarrow M' + M''$ induziert einen Isomorphismus von R- Moduln, nämlich:

$$\frac{M'}{M' \cap M''} \to \frac{M' + M''}{M''}, \, m' + (M' \cap M'') \mapsto m' + M''.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 3. Seien k ein Körper, $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(k)$ und $M := M_A$ der durch A wie in der Vorlesung definierte $k[X]$-Modul. Zeigen Sie:

i) Es existiert genau ein nicht-trivialer $k[X]$-Untermodul $U \subseteq M$. (3 Punkte)

ii) Für U wie in Teil i) bestimmen Sie explizit $Hom_{k[X]}(M/U, M)$ und folgern Sie insbesondere, dass keine $k[X]$-lineare Abbildung $s : M/U \to M$ mit $\pi \circ s = id_{M/U}$ existiert. (3 Punkte)

Aufgabe 4.

i) Sei $p \neq 2$ sowohl eine Primzahl als auch die Summe zweier Quadratzahlen. Zeigen Sie $p = 4n + 1$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, d.h. p läßt bei Division durch 4 den Rest 1. (3 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie den kanonischen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und zeigen Sie zunächst $\{x^2 \,|\, x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \{[0], [1]\} \subseteq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
Bemerkung: In i) gilt auch die umgekehrte Implikation, probieren Sie es aus !

ii) Seien R ein Ring, $\mathcal{M}$ eine Menge von R-Moduln und

$$\forall M, N \in \mathcal{M} : \; M \sim N :\Leftrightarrow \text{ es existiert ein Isomorphismus } f : M \to N \text{ von } R\text{−Moduln}.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{M}$ ist. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe.

i) Zeigen Sie Proposition 6.4 der Vorlesung: Sind R ein kommutativer Ring, M, N R-Moduln und sowohl (T, τ) als auch (T', τ') Tensorprodukte von M und N, so existiert genau eine R-lineare Abbildung $f : T \to T'$ mit $f \circ \tau = \tau'$, und f ist ein Isomorphismus. (3 Punkte)
Hinweis: Konstruieren Sie f (bzw. f') mit Hilfe der universellen Eigenschaft von (T, τ) (bzw. (T', τ')).

ii) Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Es existiert genau eine k-lineare Abbildung

$$\Phi : V \otimes_k V^* \to End_k(V)$$

mit

$$\Phi(v \otimes \varphi)(w) = \varphi(w) \cdot v \ \ \forall v, w \in V, \varphi \in V^* := Hom_k(V, k).$$

(1 Punkt)

b) Ist in Teil a) V endlich-dimensional, so ist Φ ein Isomorphismus. (2 Punkte)
Hinweis: Überlegen Sie, dass es genügt, Φ als surjektiv nachzuweisen.

UNIVERSITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 5
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 10.6.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1.

i) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass Multiplikation mit z (bzw. w) eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $Z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (bzw. $W : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ist, und bestimmen Sie die darstellende Matrix der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $Z \otimes W : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i, i \otimes 1, i \otimes i\}$. (3 Punkte).

ii) Seien k ein Körper, V, W endlich-dimensionale k-Vektorräume und $\varphi \in End_k(V), \psi \in End_k(W)$. Zeigen Sie: $tr(\varphi \otimes \psi) = tr(\varphi) \cdot tr(\psi)$. (3 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie darstellende Matrizen bzgl. *geeigneter* Basen.

Aufgabe 2. Seien R ein kommutativer Ring und M, N, P R-Moduln. Zeigen Sie:

i) Es existiert genau eine R-lineare Abbildung

$$\Phi : Hom_R(M \otimes_R N, P) \to Hom_R(M, Hom_R(N, P)) \text{ mit}$$

$(\Phi(\varphi)(m))(n) = \varphi(m \otimes n)$ für alle $m \in M, n \in N, \varphi \in Hom_R(M \otimes_R N, P)$.

(3 Punkte)

Hinweis: Es sind drei Linearitätseigenschaften zu prüfen.

ii) Zeige Sie, dass die Abbildung Φ aus Teil i) ein Isomorphismus ist. (3 Punkte)
Hinweis: Präzisieren Sie " $\Phi^{-1}(\psi)(m \otimes n) = \psi(m)(n)$."

Aufgabe 3. Seien R ein kommutativer Ring, I eine Menge, für alle $i \in I$ M_i ein R-Modul, N ein R-Modul und für alle $i \in I$ bezeichne $\iota_{M_i} : M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$, $x \mapsto (x \cdot \delta_{ij})_{j \in I}$ die kanonische Inklusion. Zeigen Sie:

i) Es existiert genau eine R-lineare Abbildung

$$f : \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R N) \to \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R N \text{ so,}$$

dass für alle $i \in I$ gilt: $f \circ \iota_{M_i \otimes_R N} = \iota_{M_i} \otimes id_N$. (2 Punkte)
Hinweis: universelle Eigenschaft der direkten Summe.

ii) Es existiert genau eine R-lineare Abbildung

$$g : \left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_R N \to \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R N) \text{ mit}$$

$g((m_i)_{i\in I} \otimes n) = (m_i \otimes n)_{i\in I}$ für alle $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$ und $n \in N$. (2 Punkte)

iii) Die Abbildungen f und g aus den Teilen i) und ii) sind zueinander inverse Isomorphismen. (2 Punkte)

Aufgabe 4. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

i) Wir haben eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

(2 Punkte)

ii) Wir haben eine exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot [n]} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0.$$

(2 Punkte)
Hinweis: Wenden Sie die Operation $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ auf die exakt Folge in Teil i) an und identifizieren Sie die auftretenden Moduln und linearen Abbildungen mit Hilfe der kanonischen Isomorphien aus 6.8,i) der Vorlesung.

iii) Folgern Sie aus Teil ii):

a) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. (1 Punkt)
b) Sind $m \neq n$ Primzahlen, so gilt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \{0\}$.(1 Punkt)

Zusatzaufgabe. Seien R ein Ring und

$$\begin{tikzcd} (1) & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M_3 \arrow[d, "\gamma"] \\ (2) & N_1 \arrow[r, "f'"] & N_2 \arrow[r, "g'"] & N_3 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln, in dem α, β und γ Isomorphismen sind. Zeigen Sie, dass die Foge (1) genau dann exakt ist, wenn die Folge (2) exakt ist. (6 Punkte)

UNIVERSITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 6
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 17.6.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien R ein Ring und

$$(*)\, 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Die Folge $(*)$ spaltet.

ii) Die Abbildung

$$g_* : Hom_R(M'', M) \to Hom_R(M'', M''),\ g_*(\varphi) := g \circ \varphi$$

ist surjektiv. (3+3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei k ein Körper.

i) Sei A eine k-Algebra für die gelten: A ist ein Integritätsring und $dim_k(A) < \infty$. Zeigen Sie, dass A ein Körper ist. (4 Punkte)
Hinweis: Beweis von 7.3 der Vorlesung.

ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass man in Teil i) auf die Voraussetzung $dim_k(A) < \infty$ nicht verzichten kann. (1 Punkte)

iii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass man in Teil i) auf die Voraussetzung, dass A ein Integritätsring ist, nicht verzichten kann. (1 Punkte)

Aufgabe 3. Seien k ein Körper, $V \neq 0$ ein k-Vektorraum, $\varphi \in End_k(V)$ und $ev^{-1}(\varphi) : k[T] \to End_k(V)$ der Einsetzungshomomorphismus. Bestimmen Sie $ker(ev^{-1}(\varphi)) \subseteq k[T]$ explizit in den folgenden Fällen:

i) $\varphi = 0$. (3 Punkte)

ii) $\varphi = id_V$. (3 Punkte)

Aufgabe 4.

i) Sei R ein kommutativer Ring. Dann heißt $x \in R$ ein *nicht-triviales nilpotentes Element*, falls $x \neq 0$ gilt und ein $n \geq 0$ mit $x^n = 0$ existiert.

   a) Geben Sie ein Beispiel eine Paares (R, x) bestehend aus einem kommutativen Ring R und einem nicht-trivialen nilpotenten Element $x \in R$. (1 Punkt)

   b) Für (R, x) wie in Teil a) zeigen Sie: $1 - xT \in R[T]^* \setminus R^*$. (2 Punkte)
   Hinweis: geometrische "Reihe".

ii) Seien $R \neq 0$ ein kommutativer Ring und $f = \sum_{i=0}^{d} r_i T^i \in R[T]$ ein Polynom, dessen höchster Koeffizient r_d eine Einheit ist, d.h. es gelte $r_d \in R^*$. Zeigen Sie:

   a) Schreiben wir $R^d := R^{(\{0,1,2,\ldots,d-1\})}$ für den freien R-Modul mit Basis $\{0, 1, 2, \ldots, d-1\}$, so existiert genau eine R-lineare Abbildung
   $$\varphi : R^d \to R[T]/(f)$$
   mit $\varphi(i) = T^i + (f)$ für alle $0 \leq i \leq d-1$. (1 Punkt)

   b) Die Abbildung φ in Teil a) ist ein Isomorphismus, d.h. der R-Modul $R[T]/(f)$ ist ein freier R-Modul mit Basis $\{T^i + (f)\}_{0 \leq i \leq d-1}$. (2 Punkte)
   Hinweis: Division mit Rest, d.h. Satz 7.11 der Vorlesung.

Zusatzaufgabe. Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathbb{Z}[X]/(2, X) \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_2.$$

(6 Punkte)

Hinweis: Homomorphiesatz für Ringe, d.h. Satz 5.6. der Vorlesung.

UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. N. Naumann

SS2011
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II

Abgabe: Freitag, 24.6.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien R ein kommutativer Ring und seien (A, φ_A) und (B, φ_B) *kommutative* R-Algebren. Dann sind A und B insbesondere R-Moduln, und wir betrachten den R-Modul $C := A \otimes_R B$.

i) Zeigen Sie, dass genau eine R-lineare Abbildung

$$\mu : C \otimes_R C \to C$$

existiert, die $\mu(a \otimes b \otimes a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$ für alle $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ erfüllt. (2 Punkte)

ii) Zeigen Sie: Mit μ als Multiplikation ist C ein kommutativer Ring mit $1_C = 1 \otimes 1$. Die Abbildungen $\iota_A : A \to C, a \mapsto a \otimes 1$ und $\iota_B : B \to C, b \mapsto 1 \otimes b$ sind Ringhomomorphismen, und es gilt $\iota_A \circ \varphi_A = \iota_B \circ \varphi_B =: \varphi_C$. Insbesondere ist (C, φ_C) eine R-Algebra. (2 Punkte)

Wir betrachten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\iota_A"] \arrow[rrd, bend left, "\alpha"] & & \\
R \arrow[ur, "\varphi_A"] \arrow[dr, "\varphi_B"'] & & C = A \otimes_R B \arrow[r, dotted, "\gamma"] & X \\
 & B \arrow[ur, "\iota_B"'] \arrow[rru, bend right, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

iii) (Die universelle Eigenschaft der R-Algebra $A \otimes_R B$)
Zeigen Sie: Für jede kommutative R-Algebra X ist die Abbildung von Mengen

$$Hom_{R-Alg}(A\otimes_R B, X) \to \{(\alpha,\beta) \,|\, \alpha \in Hom_{R-Alg}(A,X), \beta \in Hom_{R-Alg}(B,X) :$$
$$\alpha \circ \varphi_A = \beta \circ \varphi_B\} \;,\; \gamma \mapsto (\gamma \circ \iota_A, \gamma \circ \iota_B)$$

wohldefiniert und bijektiv. (2 Punkte)

Aufgabe 2.

i) Seien R ein Integritätsring und für alle $a, b \in R$ schreibe $a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b sind in R assoziiert. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge R ist. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass
$$(0) \subseteq (X) \subseteq (2, X) \subseteq \mathbb{Z}[X]$$
eine strikt aufsteigende Folge von Primidealen ist, d.h. jedes der drei angegebenen Ideale ist ein Primideal, und keine der angegebenen Inklusionen ist eine Gleichheit. (3 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie die zugehörigen Quotientenringe.

Aufgabe 3. Seien R ein Integritätsring und $\varphi : R[X] \to R[X]$ ein R-Algebrenhomomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) φ ist ein Isomorphismus.

ii) Es existieren $a \in R^*, b \in R : \varphi(X) = aX + b$. (3+3 Punkte)
Hinweis: Für $ii) \Rightarrow i)$ können Sie φ^{-1} raten. Für $i) \Rightarrow ii)$ beachten Sie $X = F(\varphi(X))$ für $F := \varphi^{-1}(X)$.

Aufgabe 4.

i) Berechnen Sie explizit
$$X := \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \equiv 1\,(3), x \equiv 2\,(5), x \equiv 3(7)\}$$
(3 Punkte)

ii) Berechnen Sie explizit:
$$X := \left\{f \in \mathbb{F}_2[X] \,|\, f \equiv 1\,(X), f \equiv 0\,(X+1), f \equiv X+1\,(X^2+X+1)\right\}$$
(3 Punkte)
Hinweis: Chinesischer Restsatz für $R = \mathbb{F}_2[X]$.

Zusatzaufgabe. Zwei ganze Zahlen $a, m \in \mathbb{Z}$ heißen *teilerfremd*, falls ihr größter gemeinsamer Teiler gleich 1 ist, äquivalent nach Vorlesung, falls $(a, m) = (1)$ gilt.

i) Zeigen Sie für gegebenes $1 \leq m \in \mathbb{Z}$:

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \{[a] \mid 0 \leq a < m : (a, m) = (1)\}$$

(2 Punkte)

Hinweis: Euklidischer Algorithmus.

ii) Bestimmen Sie explizit $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$ und $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$. (2 Punkte)

Die Abbildung

$$\varphi : \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \to \mathbb{N}\,,\ \varphi(n) := |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$$

heißt *Eulersche phi-Funktion*.

iii) Zeigen Sie, dass die Eulersche phi-Funktion multiplikativ ist, d.h. sind $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so gilt $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$. Zeigen Sie auch durch ein Beispiel, dass man hier auf die Teilerfremdheit von m und n nicht verzichten kann. (1+1 Punkt)
Hinweis: Der chinesische Restsatz liefert einen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. N. Naumann

SS2011
Blatt 8

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 1.7.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1.

i) Seien k ein Körper und $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grad 2 *oder* 3. Zeigen Sie, dass $f \in k[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn es keine Nullstelle besitzt. (2 Punkte)
Hinweis: Überlegen Sie, was es für f bedeutet, durch ein normiertes, lineares Polynom teilbar zu sein.

ii) Sei $f := X^4 + 3X^2 + 2 \in \mathbb{R}[X]$. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $f \in \mathbb{R}[X]$ ebenso wie die von $f \in \mathbb{C}[X]$ und folgern Sie insbesondere, dass $f \in \mathbb{R}[X]$ keine Nullstelle besitzt, aber reduzibel ist. (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie alle Primelemente $p \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\deg(p) \leq 3$ und folgern Sie insbesondere, dass $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ ein Körper mit 4 Elementen ist. (2 Punkte)

Aufgabe 2. Lösen Sie die Gleichung $x^2 = y^3$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, d.h. bestimmen Sie alle Quadratzahlen, die auch Kubikzahlen sind, indem Sie zeigen

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^3\} = \{(z^3, z^2) \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

Hinweis: Primfaktorzerlegung

Aufgabe 3. Für einen kommutativen Ring R zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Der Polynomring $R[X]$ ist ein Hauptidealring.

ii) Der Ring R ist ein Körper.

Hinweis: Für die Implikation $i) \Rightarrow ii)$ beachten Sie : R ist Integritätsring und $R \cong R[X]/(X)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$2 = (1+i)(1-i)$$

eine Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$ ist und entscheiden Sie, ob die auftretenden Primfaktoren assoziiert sind. (4+2 Punkte)

Zusatzaufgabe. Diese Aufgabe setzt die Zusatzaufgabe von Blatt 7 fort und benutzt die dort eingeführten Bezeichnungen.

i) Seien p eine Prmzahl und $r \geq 1$. Zeigen Sie: $\varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}$. (3 Punkte)

ii) Berechnen Sie explizit $\varphi(N) \in \mathbb{N}$, wobei N Ihr Geburtsjahr bezeichne (Sie sind nicht verplichtet, dieses korrekt anzugeben, jedes N mit $1000 \leq N \leq 2000$ ist OK). (3 Punkte)

UNIVERSITÄT REGENSBURG SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK Blatt 9
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 8.7.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien $\alpha := i \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[\alpha] := \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterring ist. (1 Punkt)

ii) Zeigen Sie, dass in dem Ring $\mathbb{Z}[\alpha]$ die Gleichung $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \alpha) \cdot (1 - \alpha)$ gilt. (1 Punkt)

iii) Verwenden Sie ohne Beweis die Tatsache, dass die Elemente $2, 3, 1 + \alpha, 1 - \alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ irreduzibel sind, um zu folgern, dass $\mathbb{Z}[\alpha]$ kein Hauptidealring ist. (4 Punkte)
Hinweis: Sonst stünde die Gleichung in Teil ii) im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 2. Seien $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 1 und $N : \mathbb{Z}[\alpha] \to \mathbb{N}, N(z) := z \cdot \bar{z}$ die Normabbildung.

i) Zeigen Sie, dass ein Element $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ genau dann eine Einheit ist, falls $N(z) = 1$ gilt, und folgern Sie $\mathbb{Z}[\alpha]^* = \{\pm 1\}$. (2 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass die Elemente $2, 3, 1 + \alpha, 1 - \alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ irreduzibel sind. (4 Punkte)
Hinweis: Aus einer nicht-trivialen Zerlegung $2 = ab$ folgt nach anwenden der Norm $4 = N(a)N(b)$ *in* $\mathbb{Z}$, und daraus der Widerspruch $N(a) = 2$.

Aufgabe 3. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der positiven Primzahlen und für alle $p \in \mathcal{P}$ sei $v_p : \mathbb{Z} \setminus 0 \to \mathbb{N}$ wie in 9.18.

i) Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathcal{P}$ die Abbildung

$$\tilde{v}_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}\,,\ \tilde{v}_p(\frac{a}{b}) := v_p(a) - v_p(b)$$

wohldefiniert und ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist. (2 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{Q}^* \to \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}\,,\; q \mapsto (\tilde{v}_p(q))_{p \in \mathcal{P}}$$

wohldefiniert und ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm 1\}$ ist. (2 Punkte)

iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \left(\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right) \to \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}\,,\; (\epsilon, \epsilon_p)_{p \in \mathcal{P}} \mapsto \left((-1)^{\epsilon} \cdot \prod_p p^{\epsilon_p} \right) \cdot \mathbb{Q}^{*2}$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus ist. (2 Punkte)

Aufgabe 4.

i) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $X^4 - 1 \in \mathbb{R}[X]$. (2 Punkte)

ii) Folgern Sie mit Teil i) einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren

$$\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

(4 Punkte)

Hinweis: Chinesischer Restsatz für $\mathbb{R}[X]$.

Zusatzaufgabe. Seien k ein Körper und $f \in k[X]$. Zeigen Sie, dass die k-Algebra $k[X]/(f)$ genau dann ein Körper ist, wenn $f \in k[X]$ irreduzibel ist, und dass in diesem Fall $dim_k(k[X]/(f)) = deg(f)$ gilt. (4+2 Punkte)

UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. N. Naumann

SS2011
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 15.7.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Sei k ein Körper.

i) Für $f \in k[X] \setminus k^*$ versieht die Komposition der kanonischen Ringhomomorphismen

$$k \to k[X] \to k[X]/(f) =: A$$

den Ring A mit der Struktur einer k-Algebra. Sei $a := X + (f) \in A$. Zeigen Sie, dass a genau dann algebraisch über k ist, wenn $f \neq 0$ ist, und dass dann $\mathrm{Mipo}_k(a) = f$ in $k[X]$ gilt. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie:

$$\{f \in k[X] \mid f \text{ ist algebraisch über } k\} = k.$$

(3 Punkte)

Hinweis: Überlegen Sie, dass für nicht konstantes f die Potenzen $f^0, f^1, \ldots$ k-linear unabhängig sind.

Aufgabe 2.

i) Seien $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ und $\sqrt{q} \in \mathbb{C}$ eine (der beiden) Quadratwurzeln aus q. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Mipo}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{q}) = \begin{cases} X^2 - q & ; \quad q \notin \mathbb{Q}^{*2} \\ X - \sqrt{q} & ; \quad q \in \mathbb{Q}^{*2}. \end{cases}$$

(3 Punkte)

ii) Sei $a := (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Mipo}_{\mathbb{Q}}(a) = X^4 - 5X^2 + 6$. (3 Punkte)
Hinweis: Die Ideale $(X^2 - 2), (X^2 - 3) \subseteq \mathbb{Q}[X]$ sind komaximal.

Aufgabe 3. Seien k ein Körper, $\varphi : A \to B$ ein k-Algebrenhomomorphismus und $a \in A$ algebraisch über k.

i) Zeigen Sie: Das Element $\varphi(a) \in B$ ist algebraisch über k, und es gilt $\mathrm{Mipo}_k(\varphi(a)) \mid \mathrm{Mipo}_k(a)$ in $k[X]$. (2 Punkte)

ii) Ist φ injektiv, so gilt in Teil i) sogar die Gleichheit $\mathrm{Mipo}_k(a) = \mathrm{Mipo}_k(\varphi(a))$. (2 Punkte)

iii) Geben Sie ein Beispiel für die Situation in Teil i) so, dass $\mathrm{Mipo}_k(\varphi(a))$ ein *echter* Teiler von $\mathrm{Mipo}_k(a)$ ist. (2 Punkte)

Aufgabe 4. Seien k ein Körper und $A \neq \{0\}$ eine endlich-dimensionale k-Algebra. Zeigen Sie:

i) Für $a \in A^*$ gilt $\mathrm{Mipo}_k(a)(0) \neq 0$. (3 Punkte)
Hinweis: Andernfalls könnten Sie die Relation $0 = \mathrm{Mipo}_k(a)(a)$ in A durch a teilen.

ii) Für jedes $a \in A^*$ existiert ein $g \in k[X]$ mit $a^{-1} = g(a)$ in A. (3 Punkte)
Hinweis: Lösen Sie die Gleichung $0 = \mathrm{Mipo}_k(a)(a)$ unter Beachtung von Teil i) nach a auf.

Zusatzaufgabe

i) Seien R ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $I \subseteq R$ ein Ideal mit $IM = M$. Zeigen Sie, dass ein Element $r \in I$ existiert, für dass $r \cdot m = m$ für alle $m \in M$ gilt. (3 Punkte)
Hinweis: Cayley-Hamilton

ii) Seien k ein Körper, V ein k-Vektorraum mit $n := dim_k(V) < \infty$ und $f \in End_k(V)$ nilpotent, d.h. es existiere (irgend) ein $N \geq 0$ mit $f^N = 0$. Zeigen Sie: $f^n = 0$. (3 Punkte)
Hinweis: Was können Sie über $\mathrm{Mipo}_k(f)$ sagen ?

UNIVERSITÄT REGENSBURG   SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK   Blatt 11
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 22.7.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen (jeweils 2 Punkte).

i)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ 1 & -5 & 4 \\ 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$$

ii)
$$\begin{pmatrix} 3t-2 & t^2 & 11t^2+4 \\ -t^3 & t+1 & t^2+t^3 \end{pmatrix} \in M_{(2,3)}(\mathbb{R}[t])$$

iii)
$$\begin{pmatrix} 2+i & 3-4i \\ 7i+1 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[i])$$

Aufgabe 2.

i) Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen der Ordnung 20 bzw. 30 bis auf Isomorphie. (3 Punkte)
Hinweis: Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen.

ii) Berechnen Sie $l_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}))$. (3 Punkte)

Aufgabe 3.

i) Seien k ein Körper und V ein k-Vektorraum. Zeigen Sie: $l_k(V) = dim_k(V)$ in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

ii) Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe als $\mathbb{Z}$-Modul genau dann endlich erzeugt und torsion ist, wenn sie endlich ist. (3 Punkte)

Aufgabe 4.

i) Konstruieren Sie Isomorphismen abelscher Gruppen, d.h. von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ für } n > 0.$$

(3 Punkte)

ii) Folgern Sie, dass es für jede endliche abelsche Gruppe A einen Isomorphismus

$$Hom_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong A$$

gibt. (3 Punkte)

Zusatzaufgabe

i) Seien R ein Ring und

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine kurze exakte Folge von R-Moduln. Zeigen Sie: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so auch M. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass das Ideal $(2, X) \subseteq \mathbb{Z}[X] =: R$, aufgefasst als R-Modul, endlich erzeugt und torsionsfrei ist, aber nicht frei. (3 Punkte)

UNIVERSITÄT REGENSBURG — SS2011
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK — Blatt 12
Prof. Dr. N. Naumann

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Freitag, 29.7.2011, 11.30 Uhr

Aufgabe 1. Seien R ein Integritätsring und

$$0 \to M' \stackrel{\alpha}{\to} M \stackrel{\beta}{\to} M'' \to 0$$

eine kurze exakte Folge von R-Moduln.

i) Zeigen Sie, dass $\alpha(T(M')) \subseteq T(M)$ und $\beta(T(M)) \subseteq T(M'')$ gelten und die Folge von R-Moduln

$$0 \to T(M') \stackrel{\alpha}{\to} T(M) \stackrel{\beta}{\to} T(M'')$$

exakt ist. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass in Teil i) die Abbildung $\beta : T(M) \to T(M'')$ im Allgemeinen nicht surjektiv ist. (3 Punkte)

Aufgabe 2. Seien R ein Hauptidealring, $p, q \in R$ Primelemente und $m, n \geq 1$. Zeigen Sie:

i) Sind p und q nicht assoziiert, so gilt $(R/(p^n)) \otimes_R (R/(q^m)) = 0$. (3 Punkte)

ii) Sind p und q assoziiert, so gilt $(R/(p^n)) \otimes_R (R/(q^m)) \cong R/(p^{min\{m,n\}})$. (3 Punkte)

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie für jeweils 2 Punkte:

i)
$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

ii)
$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}).$$

iii)

$$(\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong 0.$$

Aufgabe 4. Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie:

i) Sind I eine Menge und für alle $i \in I$ M_i ein R-Modul, so gilt die folgende Gleichheit von Untermoduln der direkten Summe $\bigoplus_{i\in I} M_i$:

$$\bigoplus_{i\in I} T(M_i) = T\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right).$$

(2 Punkte)

ii) Für jede Menge X gilt $T(R^{(X)}) = 0$. (2 Punkte)

iii) Ist $0 \neq I \subseteq R$ ein Ideal, so gilt $T(R/I) = R/I$, d.h. R/I ist ein Torsionsmodul. (2 Punkte)

Zusatzaufgabe

i) Seien R ein Hauptidealring und M ein endlich erzugter R-Modul, der kein Torsionsmodul ist. Zeigen Sie: Es existieren endlich viele freie Untermoduln $F_1, \dots, F_n \subseteq M$ mit $M = \sum_{i=1}^n F_i$. (3 Punkte)

ii) Zeigen Sie, dass die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$, aufgefaßt als $\mathbb{Z}$-Modul, torsionsfrei, aber nicht frei ist. (3 Punkte)

UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. N. Naumann

SS2011
Blatt 13

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra II
Abgabe: Anfang WiSe 2011/12

Aufgabe 1. Seien k ein Körper, $\lambda \in k$, $n \geq 1$ und $J(\lambda, n) \in M_n(k)$ das Jordankästchen und $A((X-\lambda)^n) \in M_n(k)$ die Begleitmatrix zum Polynom $(X-\lambda)^n \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass $J(\lambda, n)$ und $A((X-\lambda)^n)$ ähnlich sind. (6 Punkte)
Hinweis: Vergleichen Sie die beiden durch die gegebenen Matrizen definierten $k[X]$-Moduln.

Aufgabe 2. Klassifizieren Sie bis auf Ähnlichkeit alle reellen Matrizen mit charakteristischem Polynom

$$(T^2+1)^2(T-2)(T^2-1) \in \mathbb{R}[X].$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen die allgemeine Normalform, das charakteristische und das Minimalpolynom sowie ggf. die Jordansche Normalform:

i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

(3 Punkte)

ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_2)$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Seien k ein Körper, $n \geq 1$, $p_1, \ldots, p_n \in k[X]$ paar-weise nicht-assoziierte normierte irrduzible Polynome, und für alle $1 \leq i \leq n$ seien $1 \leq r_i \leq s_i$ natürliche Zahlen.
Entscheiden Sie, ob es einen endlich dimensionalen k-Vektorraum V und ein $f \in End_k(V)$ so gibt, dass $\chi_f = \prod_{i=1}^n p_i^{s_i}$ und $Mipo_k(f) = \prod_{i=1}^n p_i^{r_i}$ gelten. (6 Punkte)

Zusatzaufgabe Bestimmen Sie explizit die Menge

$$X := \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists x, y, z \in \mathbb{Z} : a = x + y - 2z, b = 2x + 3y + z\}.$$

(6 Punkte)
Hinweis: X ist das Bild eines Homomorphismus zwischen endlich freien $\mathbb{Z}$-Moduln.