Seminar über die Steenrod-Algebra

Prof. Dr. N. Naumann
homepage: http://homepages.uni-regensburg.de/∼nan25776/SS12Steenrod_Sem.htm

Inhalt: Dieses Seminar ist eine Einführung in die Theorie der Steenrod-Algebra nach dem klassischen Text [SE]. Der Inhalt ist fundamental für eine Spezialisierung in Richtung Algebraischer Topologie. Die Themen sind geeignet als Einstieg in eine Bachelor-Arbeit, und das Verfassen einer solchen Arbeit wird hier zum ersten Mal geübt.

Die Vorträge sollen in der Regel 60, auf keinen Fall aber länger als 90 Minuten dauern. Zu jedem Vortrag gehören kleine Themen, die schriftlich ausgearbeitet werden sollen (als Vorbereitung für das Verfassen einer Bachelor- oder Zulassungsarbeit). Die Vorträge werden nach Anfrage verteilt, welche Vorträge noch frei sind, entnehmen Sie bitte der homepage.

wichtig: Die mit * gekennzeichneten Vorträge sind für Studenten ab dem 4. Semester geeignet, da sie keine Vorkenntnisse der Algebraischen Topologie benötigen. Beachten Sie auch die Liste der Errata am Ende von [SE] !

Vortragsliste:

1. Die Steenrod-Algebra, [SE], I.§1 Erinnern Sie an cup- und äußeres Produkt, natürliche Transformationen, den Bockstein und den Künneth-Isomorphismus. Sie präsentieren eine axiomatische Einführung der Steenrod-Algebra und erste Konsequenzen der Axiome. Als Aufgabe erarbeiten Sie die Struktur der Algebren $A(0)$ und $A(1)$, die von Sq^1 (bzw. Sq^1 und Sq^2) bzgl. den Ademrelationen erzeugt wird. (Dazu verwenden Sie ohne Beweis das Theorem 3.1; die Dimensionen dieser Algebren sind 2 bzw. 8.)

2. Komplex projektive Räume, [SE], I.§2 Sie erinnern kurz an reduzierte Kohomologie, Einhängung, CW-Komplexe, die Kohomologie-Ringe der komplex projektiven Räume und die Hopfabbildung. Dann erklären Sie, wie man die nicht-trivialität der Hopf-Abbildung η mit dem cup-Produkt zeigt, aber alle Steenrod-Operationen braucht, um die nicht-trivialität aller Einhängungen von η zu erkennen. Als Aufgabe bestimmen Sie die Struktur des $A(1)$-Moduls $H^*(\mathbb{RP}^{\not\triangleright}, \mathbb{F}_{\not=})$.

3. Zulässige Monome (*), [SE], I. §3 Sie stellen algebraische Grundbegriffe bereit, geben Tensor-Algebra, Polynomring und $H^*(X, \mathbb{F}_{|})$ als Beispiel (letzteres ist sowohl eine graduierte Algebra als auch ein $A(2)$-Modul !)). Ihr Hauptresultat ist die bereits verwendete Basis zulässiger Monome der Steenrod-Algebra. Als Aufgabe bestimmen Sie den Teil dieser Basis in Dimension 12.

4. Unzerlegbare Elemente (*), [SE], I. §4 Sie beginnen das Studium der Steenrod-Algebra mit der Bestimmung ihrer unzerlegbaren Elemente und stellen die Konsequenzen für das Hopf-Invariante eins Problem dar. In 4.1. wurde an einigen Stellen die Voraussetzung homogen vergessen.

5. Die Hopf-Invariante, [SE], I. §5 Erinnern Sie an den Iso deg:$\pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$. Sie präsentieren Existenz- und nicht-Existenz-Resultate für die Hopf-Invariante. Es lohnt sich, zum Beweis von 5.2 einige Bildchen zu malen.

6. Die Hopf-Algebren Struktur (*) , [SE], II. §1 Sie etablieren eine kanonische Hopf-Algebren Struktur auf der Steenrod-Algebra und einige Konsequenzen für die Modultheorie. Als Aufgabe schreiben Sie im Detail auf, was eine Algebra über einer Hopf-Algebra ist, und warum $H^*(X, \mathbb{F}_{\not\approx})$ stets eine Algebra über der Hopfalgebra A ist.

7. Die duale Algebra I(*), [SE], II. §2 bis 2.1 einschließlich Sie diskutieren Dualität von Hopf-Algebren und zeigen eine wichtige Formel 2.1. Als Aufgabe prüfen Sie, dass $k[X]$ mit Diagonale $X \mapsto X \otimes X$ eine Hopf-Algebra ist, und bestimmen deren Duale.

8. Die duale Algebra II (*), [SE], II. §2 den Rest Sie zeigen die Struktur der dualen Steenrod-Algebra nach Milnor. Als Aufgabe überlegen Sie sich das Verhalten von Poincaré-Reihen unter Tensorprodukt und leiten daraus die Poincaré-Reihe der Steenrod-Algebra A und als konkretes Rechenbeispiel die Dimension von A_{100} ab.

9. Hopf-Ideale I (*), [SE], II. §3 bis 3.3 einschließlich Erklären Sie die Dualität zwischen Hopf-Idealen und Quotienten-Hopf-Algebren. Als Beispiele zeigen Sie die Unteralgebren $A_n \subseteq A$, die Beispiele $n = 0, 1$ sind bereits bekannt, ein Bildchen von A_2 können Sie unter http://www.staff.science.uu.nl/ henri105/PDF/A2.pdf anschauen. Als Aufgabe berechnen Sie die Dimension von A_n für alle n.

10. Hopf-Ideale II (*), [SE], II. §3 den Rest und §4 Sie studieren den Frobenius auf der Steenrod-Algebra und ihrer Dualen, lassen Sie 3.6. aus. Erklären Sie dafür kurz die Konjugation in einer Hopfalgebra, rechnen Sie die auf S. 26 dazu angegebenen Formeln nach. Falls Sie können, diskutieren Sie diese Struktur in der Kohomologie einer kompakten Lie-Gruppe.

11. Vektorfelder auf Sphären I, [MT] chapter 5 bis Prop. 2 einschließlich Wiederholen Sie den Beweis von $K(odd) = 0$ (einen Igel kann man nicht kämmen). Sie beginnen das Studium der Steifel-Mannigfaltigkeiten, mit deren Hilfe man sich den berühmten Resultaten von Adams über die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder auf einer Sphäre gegebener Dimension nähern kann.

12. Vektorfelder auf Sphären II, [MT] Rest von chapter 5 Sie ermitteln die Zellenzerlegung der Stiefel-Mannigfaltikeiten, machen Sie die Fälle $k = 2, 3$ von Theorem 1 möglichst explizit. Damit ist $H^*(P_{n,k}, \mathbb{F}_{\not\approx})$ eine gute (und bekannte !) Approximation an die Kohomologie der Stiefel-Mannigfaltigkeit, und damit kann Theorem 2 über Vektorfelder bewiesen werden. Diskutieren Sie Theorem 2 für $n \leq 12$ im Detail und, wenn Sie möchten, auch die angegebene vollständige Lösung des Problems durch Adams.

Literatur:

[SE] Steenrod, Epstein, CCohomology Operations, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press.

[MT] Mosher, Tangora, Cohomology Operations and applications in Homotopy Theory, Dover Publications.