Proseminar Lineare Algebra
Ausgewählte Kapitel

Prof. Dr. N. Naumann, Dr. K. Waldorf WS 2010/11
Zeit und Ort: Mo 12-14, M102, Beginn: 2.5.2011

Dieses Proseminar soll den Teilnehmern die Möglichkeit bieten, ausgewählte Punkte der Vorlesung Lineare Algebra I selbstständig nachzuarbeiten und zu vertiefen.
Die Ergebnisse werden dann in einem 60-80 minütigen Vortrag den Kommilitonen/innen vorgestellt und diskutiert.
Die Vorträge müssen nicht schriftlich ausgearbeitet werden, *aber* zu jedem Vortrag gibt es einige Übungsaufgaben, die *spätestens zwei Wochen vor dem Vortrag* schriftlich bei K. Waldorf abgegeben werden müssen. Die Note des Vortrages setzt sich 70/30 aus dem Vortrag und den Aufgaben zusammen.

1) Der Quotientenvektorraum
Referenz: [B] Bemerkung 5 auf S. 67 bis Korollar 9 auf S. 70.
Für einen K-Untervektorraum $U \subseteq V$ konstruieren Sie den Quotientenvektorraum V/U und weisen seine grundlegenden Eigenschaften nach (Satz 7). Sie beweisen die universelle Eigenschaft dieser Konstruktion (Satz 8) und eine direkte Folgerung daraus (Isomorphiesatz - Korollar 9).
Aufgaben: Aufgaben 10 und 11 auf S. 74/75 von [B].

2) Das äußere Produkt - erste Eigenschaften
Referenz: [B] 4.5. S. 155- "des Vektorraumes $\bigwedge^r V$" auf S. 157
Definieren Sie multilineare und alternierende Abbildungen (Vorsicht, hier allgemeiner als aus der Vorlesung bekannt), erläutern Sie im Detail alle Aussagen aus Satz 2 (universelle Eigenschaft des äußeren Produkts) und weisen sie die Eindeutigkeit bis auf eindeutige Isomorphie nach. Sie konstruieren die universelle alternierende Abbildung $\sigma : V^r \to \bigwedge^r V$ und weisen ein Erzeugendensystem nach (Bemerkung 3).
Aufgaben: 2 und 3 auf S. 163 [B].

3) Das äußere Produkt - Existenz
Referenz: [B] S. 157 "Um nun den Beweis ..." bis S. 159 oben "Quotientenvektorraum D erzeugen"

Erläutern Sie im Detail den auftretenden Vektorraum $\hat{D}$ und die (im Text nicht angegebene!) Gleichheit $\hat{D} = \mathrm{Abb}^{fin}(V^r, K)$ (Bezeichnung aus der Vorlesung Lineare Algebra I). Sie konstruieren dann das äußere Produkt und weisen seine bereits formulierte universelle Eigenschaft nach.
Aufgaben: 6. auf S. 163 [B].

4) Das äußere Produkt - weitere Eigenschaften
Referenz: [B] S. 159 oben "Die vorstehende ..." bis S. 160 einschließlich
Sie konstruieren Basen in dem äußeren Produkt und entwickeln ein beliebiges Element in dieser Basis (Satz 4). Dann erläutern Sie die Funktorialität der Konstruktion $V \mapsto \bigwedge^r V$ und zeigen, dass man damit insbesondere die aus der Vorlesung bekannte Determinante eines Endomorphismus erhält (Korollar 5).
Aufgabe 4 auf S. 163 [B].

5) Die Multiplikation in $\bigwedge^\bullet V$
Referenz: [B] S. 161 - S. 163
Sie konstruieren eine Multiplikation in $\bigwedge^\bullet V := \bigoplus_{r\geq 0} \bigwedge^r V$ (Lemma 6), und beweisen deren Zusammenhang mit den Determinanten von Untermatrizen (Satz 7). Erläutern Sie im Detail die Spezialfälle $r = 1$ und $r = n-1$ in Satz 7 !
Aufgabe 5 auf S. 163 [B] (in dieser Aufgabe ist ein offensichtlicher Druckfehler)

6) Quadratische Formen
Referenz: [L] S. 31 - "Zahlentheorie darstellt" auf S. 42.
Sie definieren quadratische Formen, quadratische Räume und Isometrien, inlkusive der Bemerkungen nach Definition 2. Dann beweisen Sie einige grundlegende Aussagen: die Existenz von Orthogonalbasen (Satz 1) und die anschließenden Bemerkungen (1), (2), (5) und (6), außerdem stellen Sie das "Klassifikationsproblem quadratischer Formen" vor.
Aufgaben: Übungsaufgaben 1 auf S. 34 und 3 auf S.37 in [L].

7) Witt'scher Kürzungssatz und Relationensatz
Referenz: [L] S. 42 "Im Rahmen der Linearen..." - Ende von §2 auf S. 45.
Sie leiten Kriterien für die Äquivalenz von quadratischen Formen her: Sie beweisen den Kürzungssatz von Witt (Satz 2), lösen die Übungsaufgabe 5 (unten auf S. 43), leiten die Witt'sche Relation (F2) her und beweisen den Relationensatz für quadratische Formen (Satz 3).

Aufgaben: Übungsaufgaben 2 auf S. 34 in [L] und 5 (vgl. oben).

8) Isotrope Vektoren
Referenz: [L] §3 (S. 45 - S. 50)
Sie stellen einige Aussagen und Definitionen zu isotropen Vektoren in quadratischen Räumen zusammen: F3 auf S. 45, Definition 3 und F4 über die "Hyperbolische Ebene". Dann definieren Sie die "Orthogonale Summe" und beweisen F5 "Orthogonale Abspaltung".
Aufgaben: Übungsaufgaben 6 auf S. 46 und 7 auf S. 48 in [L].

9) Die orthogonale Gruppe
Referenz: [L] §4 (S. 51 - Ende des Beweises des Lemmas auf S. 56)
Sie erinnern an die Definition einer Isometrie und definieren die orthogonale Gruppe einer quadratischen Form (Definition 5). Gehen Sie ausführlich auf die anschließenden Bemerkungen ein, insbesondere auf die geometrische Anschauung von Spiegelungen und auf die Bemerkung über anisotrope Vektoren (S. 54 unten). Beweisen Sie das Lemma auf S. 56 oben.
Aufgaben: Beweisen Sie die Aussage um Gleichung (96) auf S. 53, und verifizieren Sie, dass die in (103) definierte Abbildung linear ist und die in (98) geforderten Eigenschaften besitzt.

10) Erzeugung orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen
Referenz: [L] S. 56 "Wir erinnern" - Ende von §4 (S. 61)
Sie beweisen den Satz 4. Der Beweis benutzt einige Resultate aus vorangegangenen Vorträgen und geht bis "Bemerkung 1" auf S. 59. Veranschaulichen Sie die Bedeutung des Satzes anhand der nachfolgenden Bemerkungen, insbesondere die für die Fälle $n = 2, 3$.
Aufgaben: Übungsaufgabe 8 auf S. 59 [L].

11) Isometrien
Referenz: [B] 7.5 auf S. 267 bis S. 269 Korollar 3 einschließlich.
Sie führen Isometrien eines euklidischen/unitären Vektorraumes über verschiedene Charakterisierungen ein (Satz 1), diskutieren im Detail den einfachsten nicht-trivialen Spezialfall von Isometrien $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und schließen mit einer Charakterisierung der zu Isometrien gehörenden Matrizen (Korollar 3).
Aufgaben: Aufgabe 1 auf S. 275 in [B].

12) Die Gruppen $O(n)$ und $U(n)$
Referenz: [B] S. 270 oben bis S. 273 Satz 7.
Sie erinnern an die Definition der unitären und (speziellen) orthogonalen Gruppen, machen im Falle von Rang 2 alles vollständig explizit (Sätze 5 und 6) und schließen mit einem allgemeinen Satz über die Normalform von Isometrien (Satz 7).
Aufgaben: Aufgaben 2 und 4 auf S. 275 in [B]

Referenzen

[B] S. Bosch, Lineare Algebra, 2. Auflage, Springer.

[L] F. Lorenz, Lineare Algebra II, 3. Auflage, Spektrum.