Ergänzungen Thema 5

3.3 Definition (Nochmal richtig) Ein Divisor $D \in Div(C)$ heißt *Hauptdivisor*, wenn er von der Form $D = div(f)$ für ein $f \in \bar{K}(C)^*$ ist.
Zwei Divisoren heißen *linear äquivalent*, geschrieben $D_1 \approx D_2$, wenn $D_1 - D_2$ Hauptdivisor ist.
Die *Divisorklassengruppe (oder Picard- Gruppe) von C*, geschrieben $Pic(C)$, ist der Quotient von $Div(C)$ über der Untergruppe der Hauptdivisoren. $Pic_K(C)$ sei die Untergruppe von Pic(C), die von $G_{\bar{K}/K}$ fixiert wird.

3.6 Beispiel Seien $char(K) \neq 0$, $e_1, e_2, e_3 \in \bar{K}$ verschieden und

$$C : y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

Dann ist C glatt und hat einen Fernpunkt $P_\infty = [0 : 1 : 0]$. Sei $P_i = (e_i, 0) \in C$ für $i = 1, 2, 3$, dann gilt

$$div(x - e_i) = 2(P_i) - 2(P_\infty)$$

Beweis:
ohne Einschränkung i=1. Dann wird M_{P_1} von $(x - e_1)$ und y erzeugt,
da nun aber nach Voraussetzung $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$ und $(x - e_2)(x - e_3)$ Einheiten von M_{P_1} sind (da $x - e_2 = x - e_1 + e_1 - e_2 = e_1 - e_2 \neq 0 (mod M_{P_1})$
$\Rightarrow y$ und sogar y^2 erzeugt auch $(x - e_1)$
$\Rightarrow ord_{P_1}(x - e_1) = 2$.
Betrachte nun P_∞. Dann folgt nach Homogenisierung

$$zy^2 = (x - ze_1)(x - ze_2)(x - ze_3)$$

und wieder dehomogenisiert nach y

$$z/y = \prod_{i=1,2,3} (x/y - e_i z/y) \tag{1}$$

Nun ist aber

$$(x/z - e_i) = (x/y - e_i z/y) \cdot (z/y)^{-1}$$

Nun ist aber $ord_{P_\infty}(x/y - e_i z/y) = 1$, da (x/y) und(z/y) Erzeuger von P_∞ sind.
Gleichzeitig ist aber $ord_{P_\infty}(z/y)^{-1} = -3$ (da nach (1) (z/y) das Produkt aus 3 Faktoren mit Ordnung 1 ist.
Insgesamt gilt dann also $ord_{P_\infty}(x/z - e_i) = -2$ □

3.9 Beispiel Sei C eine glatte Kurve, $f \in \bar{K}(C)$ eine nicht-konstante Funktion, und $f : C \to \mathbb{P}^1$ die entsprechende Abbildung wie in (Sil 2.2). Dann folgt

$$div(f) = f^*((0) - (\infty)).$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
div(f) = \sum_{P \in C} ord_P(f)(P) &= \sum_{P \in f^{-1}([0:1])} ord_P(f)(P) + \sum_{P \in f^{-1}([1:0])} ord_P(f)(P) = \\
&= \sum_{P \in f^{-1}([0:1])} ord_P(f)(P) - \sum_{P \in f^{-1}([1:0])} ord_P(\frac{1}{f})(P) = \\
&= \sum_{P \in f^{-1}([0:1])} ord_P(f^* t_{[0:1]})(P) - \sum_{P \in f^{-1}([1:0])} ord_P(f^* t_{[1:0]})(P) = \\
&= div(f) = f^*((0) - (\infty))
\end{aligned}
$$

Die 2.Gleichheit folgt, da alle anderen Punkte weder Pol noch Nullstelle sind und somit Ordnung 0 haben, die 4.Gleichheit folgt nach Definition von f (aus 2.2), da nach Dehomogenisierung $f^* t_{[0:1]} = f$
und wiederum nach Dehomogenisierung $f^* t_{[1:0]} = \frac{1}{f}$ □

Aufgabe 2.2

Voraussetzung:
Sei $\phi : C_1 \to C_2$ eine nicht-konstante Abbildung glatter Kurven,
$f \in \bar{K}(C_2)^*, P \in C_1$.

Behauptung:
Dann gilt

$$ord_P(\phi^* f) = e_\phi(P) ord_{\phi(P)}(f)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} ord_P(\phi^* f) &= ord_P(\phi^*(t_{\phi(P)}^a \cdot u)) = \\ &= ord_P((\phi^* t_{\phi(P)})^a \cdot \phi^* u) = \\ &= a \cdot ord_P(\phi^* t_{\phi(P)}) + ord_P(\phi^* u) \end{aligned}$$

wobei $a := ord_{\phi(P)}(f), t_{\phi(P)}$ Uniformisierer bei $\phi(P)$ und u geeignete Einheit bei $\phi(P)$ ist, d.h. $u \neq 0$ (mod $M_{\phi(P)}$) und $u \in O_{C_2,\phi(P)}$.
Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} u \text{ Einheit bei } \phi(P) &\Leftrightarrow u(\phi(P)) \neq 0, \text{ d.h. u hat keinen Pol bei } \phi(P) \\ &\Leftrightarrow (\phi^* u)(P) \neq 0 \Leftrightarrow \phi^* u \text{ Einheit bei P} \end{aligned}$$

Also ist $ord_P(\phi^* u) = 0$ und somit, da $e_\phi = ord_P(\phi^* t_{\phi(P)})$, folgt die Behauptung $\square$

Aufgabe 2.5

Voraussetzung:
Sei C eine glatte Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\bar{K}$.

Behauptung:
Dann sind äquivalent:

(a) C ist isomorph zu $\mathbb{P}^1$

(b) C hat Geschlecht 0

(c) $\exists P, Q \in$ C mit $(P) \cong (Q), P \neq Q$

Beweis:
(a)⇒(b)
Nach 5.6 gilt: $g(\mathbb{P}^1) = 0$.
Da C isomorph zu $\mathbb{P}^1$ und das Geschlecht Isomorphieinvariante ist, gilt also auch $g(C) = 0$.

(b)⇒(c)
Sei also $g(C) = 0$. Wähle $P, Q \in C, P \neq Q$.
Betrachte den Divisor $D = (P) - (Q)$
$\overset{Riemann-Roch}{\Rightarrow} l(K - D) = 0$ (nach 5.4) und $l(D) = 1$ (nach 5.5).
Da nun aber $l(D) \neq 0$ ist D linear äquivalent zu einem positiven Divisor und da $deg(D) = 0$
$\Rightarrow D \cong 0$ und somit (P) $\cong$ (Q)

(a)⇒(c)
Sei $f : C \to \mathbb{P}^1$ ein Isomorphismus.
Dann gilt:

$$div(f) = f^*(\{0\} - \{\infty\}).$$

Wähle nun P:=$f^*(\{0\})$, $Q := f^*(\{\infty\})$ (da f Isomorphismus ist, existieren die Urbilder eindeutig),
also $(P) - (Q) = div(f)$ und somit $(P) \cong (Q)$

(c)⇒(a)
Es existieren also $P, Q \in C, P \neq Q, f \in K(C)$, sodass

$$div(f) = (P) - (Q).$$

Wähle nun wiederum (nach 2.2) die zu f gehörende Abbildung $f : C \to \mathbb{P}^1$.
Da aber ja zugleich $div(f) = f^*(\{0\} - \{\infty\})$, ist also $f(P) = \{0\}$.
Also $f^*\{0\} = P$ und

$$deg(f)deg(\{0\}) = deg(P),$$

da aber $deg(\{0\}) = deg(P) = 1$ (da $deg(P) = [K(P) : K] = 1$ wegen $K = \bar{K} \Rightarrow K = K(P)$)
$\Rightarrow deg(f) = 1$
⇒ Isomorphismus □