Universität Regensburg
NWF I - Mathematik

Prof. Dr. Uwe Jannsen
Patrick Forré

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/2009

Übungsblatt 11

23. Dezember 2008

Aufgabe 1. Sei $f : A \hookrightarrow B$ eine Ringerweiterung und $\bar{A}$ der ganze Abschluss von A in B. Zeigen Sie, dass der ganze Abschluss $\overline{A[T]}$ von $A[T]$ in $B[T]$ gleich $\bar{A}[T]$ ist.
Hinweis zu "$\subseteq$":

(i) Reduzieren Sie die Aussage auf normierte Polynome $f(T) \in \overline{A[T]}$ mit einer Ganzheitsgleichung

$$f(T)^n + a_{n-1}(T)f(T)^{n-1} + \cdots + a_1(T)f(T) = a_0(T)$$

mit $\deg f(T) > \max_{1 \leq i \leq n-1} \deg a_i(T)$, wobei alle $a_i(T) \in A[T]$ sind.

(ii) Betrachten Sie die Nullstellen von $a_0(T)$ in einer $a_0(T)$ zerlegenden Ringerweiterung von $B[T]$ und machen Sie dann Aussagen über die Koeffizienten von $f(T)$.

Zusatz (+2 Extrapunkte): Zeigen Sie: Ist R ein normaler Integritätsring, so auch $R[T]$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei A ein noetherscher Integritätsring. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Spec}(A)$ ist endlich.

(ii) $\mathrm{Spec}(A)$ ist endlich und $\dim A \leq 1$.

(iii) Es gibt ein $f \in A$, so dass A_f ein Körper ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \to B$ ein endlicher Ringmorphismus, wobei B als A-Modul von n Elementen erzeugt wird. Zeigen Sie, dass über jedem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ höchstens n Primideale $\mathfrak{P} \subseteq B$ liegen.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die Fasern.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei k ein Körper.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für $f, g \in k[X, Y]$ äquivalent sind:

(i) $\dim \left(k[X,Y]/ < f, g >\right) \leq 0$.

(ii) f und g sind teilerfremd in $k(X)[Y]$ und die Koeffizienten von f und $g \in k[X][Y]$ sind teilerfremd in $k[X]$.

(iii) f und g sind teilerfremd im faktoriellen Ring $k[X, Y]$.

b) Bestimmen Sie die Dimension von

$$k[X,Y,Z]/ < X^3 + Y^5 + Y,\ X^2Y^2 + XY + 1,\ 4Z^3Y + 2Z^2Y + 1 > .$$

(4 Punkte)